



TITLE:

立体トラスの最適設計解順序集合
生成法及び最適部材配置選定法(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

大崎, 純

CITATION:

大崎, 純. 立体トラスの最適設計解順序集合生成法及び最適部材配置選定法. 京都大学, 1993, 博士(工学)

ISSUE DATE:

1993-03-23

URL:

<https://doi.org/10.11501/3066336>

RIGHT:

新 制
工
911
京大附図

立体トラスの最適設計解順序集合生成法
及び最適部材配置選定法

1992 年 11 月

大 崎 純

立体トラスの最適設計解順序集合生成法
及び最適部材配置選定法

1992 年 11 月

大 崎 純

目次

1 章	序	1
1.1	研究の背景及び目的	1
1.2	発表論文リスト	7
2 章	最適解順序集合生成法及び不要変数選定法	10
2.1	序	10
2.2	パラメトリック最適化問題の定式化及び最適性条件	12
2.3	パラメター θ に関する最適解の感度解析	13
2.4	パラメター ξ に関する最適解の感度解析	16
2.5	最適解順序集合の定義	18
2.6	パラメター θ に関する最適解順序集合生成法	20
2.7	パラメター ξ に関する最適解順序集合生成法	23
2.8	最適解順序集合生成法に基づく不要変数選定法	25
2.9	パラメターに関する微分係数が存在するための十分条件	26
2.10	2 章の結論	28
3 章	指定重複 1 次固有振動数を有する最適トラスの順序集合生成法	31
3.1	序	31
3.2	最適設計問題の定式化及び最適性必要十分条件	33
3.3	指定 1 次固有値に関する区分的テイラー展開手法	35
3.4	最小断面積制限値の存在しない場合	41
3.5	円筒状立体トラスの最適曲率半径生成法	44
3.6	最適設計解順序集合の概念に基づく 2 段階最適設計法	45
3.7	例題	52
3.8	3 章の結論	74
4 章	指定強震時応答ひずみを有する最適トラスの順序集合生成法	79
4.1	序	79
4.2	指定強震時応答ひずみを有するトラスの最適設計問題	81
4.3	強震時応答ひずみ制約設計解順序集合生成法	84
4.4	例題	90
4.5	4 章の結論	109
5 章	指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適部材配置生成法	114
5.1	序	114
5.2	最小断面積制限値をパラメターとした最適設計解順序集合生成法	116

5.3	ピン接合平面トラスの最適部材配置生成法	121
5.4	剛接合立体トラスの最適部材配置生成法	125
5.5	例題	127
5.6	5章の結論	141
6 章	指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計	145
6.1	序	145
6.2	臨界点の分類及び不整感度解析法の概説	148
6.3	最適設計問題の定式化及び最適性必要条件	154
6.4	指定極限点荷重係数をパラメータとした最適設計解順序集合生成法.....	167
6.5	トラスに対する基礎式の誘導	169
6.6	例題	172
6.7	6章の結論	182
7 章	結論	185

1 章 序

1.1 研究の背景及び目的

構造物の最適設計理論は、1960年代以降コンピュータの発達にともない発展した理論であり、機械、航空等の分野で多くの実用的成果を得ている[1-5]。それらの分野で最適設計理論の実用化が進展した理由としては、(a) 設計時に考慮すべき外乱の不確定性が少ないこと、(b) 目的関数としての全コストの設定が容易であること、(c) 同一の構造物を大量生産する場合が多く、最適化することの意義が大きいこと、等が挙げられる。

一方、建築構造設計の分野では、機械、航空等の分野と比べて最適設計法の実用化は大きく遅れている。その理由としては、(d) 設計時に考慮すべき外乱の種類が多く、その不確定性も大きいこと、(e) 目的関数としてのコストの設定において、力学的要因以外に施工時のコスト等の種々の要因を考慮しなければならないこと、(f) 建築構造物は一般に単品生産であり、最適化のために多くの労力を使うのは実用的でないこと、等が挙げられる。これらの理由により、建築構造設計で何らかの最適設計問題を考えるときには、多目的多制約の最適設計問題[6]を考えるのが望ましい。しかし、単層立体トラスの設計において、座屈時耐力が主要な設計条件となるように[7]、構造物の形態によっては、1つの設計条件のみが決定的となることが多い。ゆえに、単一目的単一制約の最適設計問題に対する種々の理論を展開することは、多目的多制約の最適設計問題に対する基礎的理論としてだけでなく、それ自体実用的価値が大きいものと考えられる。また、上記(f)と関連して、建築構造物において、最適設計法の実用化が遅れている1つの理由としては、実用規模の構造物に対しても容易に適用できるアルゴリズムが存在しないことが挙げられる。したがって、大規模構造物に対しても適用でき、多くの労力および計算時間を必要とせずに、最適設計解を得ることが可能であるような数値的手法を開発することは有意義である。

建築構造物の最適設計問題では、部材あるいは部材要素の剛性が設計変数として採用される場合が多い。ゆえに、何らかの最適化手法を用いて最適設計解を求めることにより、最適な部材剛性等が得られる。しかし、例えば1次固有振動数制約条件下の最適設計問題では、最適化を実行する前に、指定1次固有振動数を与えなければならない。設計者にとって、指定1次固有振動数を定めるための十分な指標は存在せず、何の情報もなしに1つの指定値を与えることは困難である。したがって、指定1次固有振動数は、種々の指定値に対応する最適設計解を得た後に、それらの設計解の特性を考慮した結果、逆に決定すべきものである。建築構造物の最適設計法に関するこれまでの研究は、解析的研究と数値的研究に分けられる。中村ら[8]はせん断型構造物、平面骨組等の規則性を有する構造物に対し、その規則性を利用した多くの解析的成果を発表している。これらの解析的成果を用いると、種々の指定量に対応する最適設計解が得られるばかりではなく、最適設計解の特性を容易に考察することが可能である。しかし、それらの手法を立体トラス等の複雑な大規模トラスに適用すること

は困難である。一方、数値的研究では、感度解析法に基づく数値計画法あるいは最適性条件を用いた手法等を適用した種々の研究 [9,10] が存在するが、それらの研究では、1つの制約条件の組に対する1つの最適設計解を求めることを目的としており、種々の制約条件の組に対する最適設計解の集合を求めることのできる成果はほとんどみられない。

本論では、目的関数及び不等式制約条件を表わす関数において、いくつかの単調性の条件が成立するような最適設計問題に対し、全変数とその最小制限値に一致するような自明な設計解を初期最適設計解とする「最適設計解順序集合」という概念を新しく導入し、制約条件を規定するパラメータの連続的集合に対して、最適設計解の集合を連続的に生成する理論を提示する。2章では、3章以下で展開する種々の理論及び数値的手法の基礎をなす理論を述べる。変数の他にいくつかのパラメータを含む最適化問題は、パラメトリック最適化問題として知られており、多くの論文が発表されている [11,12]。また、工学の分野でも、最適設計解の、指定1次固有振動数、応力上限値等のパラメータに関する感度 (optimum design sensitivity) を求めるいくつかの研究が存在する [13,14]。しかし、それらの論文で展開されている手法では、何らかの最適化手法を用いて1つの最適解が得られていることを前提としている。すなわちそれらの手法は、post optimal analysis に対して有用である。本論では、変数に対して最小制限値が存在し、目的関数及び制約条件を規定する関数に関して種々の単調性の条件が成立するような、工学的に重要な種類の最適化問題に対して、全変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解とする「最適解順序集合」の概念を新たに定義し、パラメータに関する区分的テイラー展開により、最適解順序集合を生成する理論を展開する。本理論を用いると、既往の最適化手法を全く用いずに、種々のパラメータ値に対応する最適解を容易に求めることができる。上記区分的テイラー展開手法では、パラメータが全順序関係の成立する実数値集合に属することが重要である。また、3章以下では、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値などの、最適設計問題を定めるパラメータの連続集合に対する最適設計解の連続集合を生成し、パラメータ値の増加あるいは減少にともなう最適設計解の変化について考察する。以上の理由により、本論では「最適解順序集合」及び「最適設計解順序集合」の概念を新たに定義し、用いるものとする。

3章では、指定1次固有振動数を有するトラスの最適設計解を、制約条件を定めるパラメータとしての指定1次固有振動数の関数と考え、最適設計解順序集合を生成する理論を展開する。1次固有振動数は、動的剛性を表わす指標として重要な力学的システムパラメータであり、地盤の卓越振動数を考慮して地震動等の種々の動的外乱に対する共振を避けるためにも、指定1次固有振動数を有するトラスの最適設計問題を考えることは、実用上価値のあるものである。本手法では、全部材の断面積がその最小制限値で定まるような自明な最適設計解を初期解とし、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値に関する区分的テイラー展開手法により、最適解順序集合を生成する。平板状立体トラスの例題では、最適設計解において1次固有振動数が重複することを明らかにする。したがって、最適設計問題の定式化及び最適性条件の導出においては、1次固有振動数が重複することを考慮する。1次固有振動数が重複するときには、その設計感度係数を求めることすら困難であり、最適設計

解を感度解析に基づく何らかの最適化手法を用いて求めるときには、方向微分概念を用いた複雑な定式化が必要となる [15]。そのため、大規模トラスに対して、1 次固有振動数が重複する場合の最適設計解を求めた例はみられない。本手法は、全部材の断面積がその最小制限値で定まるようなトラスを初期解とし、そのトラスに対して固有値解析を行なうため、最小断面積制限値が存在しない場合 (最小断面積制限値が 0 の場合) に対して適用することができない。そこで、このような場合に対し、全部材の断面積が 0 であるような不安定なトラスを初期解とする手法を新たに提示する。

さらに、立体トラスに対し、曲面板状立体トラスの曲率半径等の、1 つの幾何学的パラメータを補助パラメータとして導入し、種々の幾何学的パラメータ値を有する立体トラスについて、指定 1 次固有振動数をパラメータ (主パラメータ) として、最適設計解順序集合を生成する。その結果、各指定 1 次固有振動数レベルにおいて、最適設計解における目的関数値は、幾何学的パラメータの指定値ごとに定められ、最適な幾何学的パラメータ値を求めることができる。従来の幾何学的形状の最適化手法では、節点位置を設計変数として、節点位置に関する複雑な感度解析手法を用いて最適設計解を求める手法がほとんどである [16]。それらの手法では、1 次固有振動数のある指定値に対する最適形状が得られるだけである。設計者にとっては、種々の指定 1 次固有振動数に対する最適形状を示す設計図表が得られたならば、非常に有意義である。指定 1 次固有振動数を主パラメータ、幾何学的パラメータを補助パラメータとする本手法は、一見遠回りのように思われるが、最終的には計算時間の上でも有効な手法である。また、「最適設計解順序集合」を生成する理論によると、高次固有振動数あるいは全部材体積と 1 次固有振動数との関係等の、最適設計理論に基づく種々の「設計図表」を得ることができ、設計者はそれらの図表に基づき、最も望ましい最適設計解を選択することができる。

ところで、最適設計解集合から 1 つの最適設計解を選択するための、何らかの理論が存在することが有用である場合もある。そこで、fractional programming [17] の定式化に基づき、最適設計解集合から 1 つの最適設計解を選択するための、新しい 2 段階最適設計法の理論を展開する。第 2 段階としての fractional programming は、最適設計解集合を許容設計解集合とし、output としての 1 次固有振動数に対応する 1 次固有値に対する input としての全部材体積の比を最小化する問題である。第 1 段階としての、最適設計解順序集合生成問題に対応する最適設計解集合における全部材体積は、多くの場合指定 1 次固有振動数に対応する指定 1 次固有値の凸関数であることを示し、第 2 段階の最適設計解が唯一に決定されることを明らかにする。さらに、その最適設計解は、最適設計解順序集合を許容設計解とした場合の最適設計解であるばかりでなく、第 1 段階の最適設計問題に対する許容設計解を許容設計解としたときの、最適設計解でもあることを明らかにする。

4 章では、1 次固有振動数等の力学的システム量ではなく、強震時応答ひずみという局所応答量を考慮した、最適設計問題に関する理論を展開する。入力地震動としては、設計応答スペクトルに適合する地震動の集合を考え、それらの入力地震動に対する平均最大応答ひずみが、指定値以下となるような制約条件を有する最適設計問題を定式化し、最適性必要条件を導く。ここで、部材の最大ひずみあるいは応力は、弾性限内に存在するものとする。しかし、この問題に対する最適設計解を得るた

めには、既往の数値計画法の手法では多くの計算時間を必要とし、大規模トラスに対して適用することは困難である [18]。そこで、最小断面積制限値の存在する 1 つの全応力設計問題としての、地震時応答ひずみ制約設計問題を定式化する。この問題に対する「地震時応答ひずみ制約設計解」は、上記の最適設計問題に対する許容設計解であり、良好な近似最適設計解であるものと予想される。ところで、地震時応答ひずみ制約設計解は、設計ひずみを規定する 1 つのパラメーターの関数と考えることができる。そこで、3 章の区分的テイラー展開手法を拡張して、「地震時応答ひずみ制約設計解順序集合」を生成するための理論を展開する。さらに、大規模曲面板状立体トラスに対して、地震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し、得られた応答制約設計解に対して、最適性必要条件を検定することにより、設計応答ひずみの広い領域にわたって、応答制約設計解が、地震時応答ひずみに関する制約条件を有する最適設計問題の最適設計解であることを例証する。

5 章では、最適設計解順序集合の概念に基づく、制約条件を定めるパラメーターに関する区分的テイラー展開手法が、節点位置及び存在可能部材の配置の与えられたトラスの最適部材配置及び、それに対応する最適部材断面積を求める問題に対しても有効であることを示す。トラスの最適部材配置を求める手法については、多くの論文が発表されているが、それらのほとんどすべては静的載荷時の応力に関する制約条件が与えられた場合に関するものである [19]。それらの論文では、種々の数値的解法が示されているが、存在しない部材では応力制約条件は満たされなくても良いという事実に起因する最適設計解の特異性等の理由により、一般的解法は存在しない。本章では、指定 1 次固有振動数を有するトラスに対し、最適性条件が大域最適性の必要十分条件であることを有効に用いた一般理論を展開する。まず、ピン接合平面トラスに対し、最小断面積制限値を定める 1 つのスカラーパラメーターに関する区分的テイラー展開を用いて、最適部材配置を求める手法を示す。本手法では、全部材の断面積がその最小制限値で定まるような自明な最適設計解を初期解とし、区分的テイラー展開手法により最小断面積制限値を減少させ、最小断面積制限値が存在しない場合の最適設計解を求めることにより、最適部材配置を得る。さらに、簡単なモデルを用いて詳細に検討することにより、理論的に厳密な最適部材配置トラスでは、非常に小さい断面積を有する 2 次部材が多く存在することを明らかにし、実用的な最適部材配置を求める手法を提示する。また、得られた実用的最適部材配置トラスが不安定な場合について、それを安定化するための手法を示す。最適部材配置トラスが不安定となるのは、節点がピン接合であるためである。そこで、剛接合立体トラスに対して最適部材配置を求めるための手法を示し、2 層平板状立体トラスに適用することにより、本手法の有効性を明らかにするとともに、得られた最適部材配置の特性について考察する。

6 章では、座屈荷重係数を力学的システム量として考慮した場合についての、最適設計解集合を求める理論を展開する。本章では、離散系弾性安定論の一般理論 [20] を用いた定式化を行なうため、まず、その理論の概要を述べる。次に、座屈形態が極限点型であるような設計解を許容設計解として考慮した場合の最適性必要条件を導き、すでに得られている経験的最適性必要条件 [21] との差異について、簡単な剛体バネモデルを用いて検討する。さらに、対称なトラスに対称な荷重が作用す

る場合を想定し、対称分岐点を呈するような設計解集合を許容設計解の集合として考慮した場合に対し、minor imperfection[22]に関する不整感度解析の理論に基づき最適性必要条件を導き、塔状平面トラスを用いて検証を行なう。また、極限点型座屈の場合について、指定極限点荷重係数をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する理論を展開する。例題では、24部材単層立体トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、最適設計解の特性について考察する。

7章では、本論で得られた成果の概要を述べ、今後の発展の可能性について論じる。

参考文献

- [1] A. Sawczuk and Z. Mróz (eds.), Optimization in Structural Design, Proc. Symp. IUTAM, Warsaw, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [2] R.L. Fox and M.P. Kapoor, Structural optimization in the dynamic response regime; A computational approach, AIAA J., Vol.8, pp1798-1804, 1970.
- [3] C.Y. Sheu, Elastic minimum-weight design for specified fundamental frequency, Int. J. Solids Struct., Vol.4, pp953-958, 1968.
- [4] V.B. Venkayya, Structural optimization: A review and some recommendation, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.13, pp203-228, 1978.
- [5] J.S. Arora, Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [6] M.P. Bendsøe, N. Olhoff and J.E. Taylor, A variational formulation for multicriteria structural optimization, J. Struct. Mech., Vol.11(4), pp523-544, 1983.
- [7] N.S. Khot and M.P. Kamat, Minimum weight design of truss structures with geometric nonlinear behavior, AIAA J., Vol.23(1), pp139-144, 1985.
- [8] Tsuneyoshi Nakamura and T. Yamane, Optimum design and earthquake-response constrained design of elastic shear buildings, Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.14(5), pp797-815, 1986.
- [9] V.B. Venkayya and V.A. Tishler, Optimization of structures with frequency constraints, in: Computer Methods in Nonlinear Solids Structural Mechanics ASME-AMD-54, ASME, New York, pp239-259, 1983.
- [10] R.J. Balling, K.S. Pister and V. Ciampi, Optimal seismic-resistant design of a planar steel frame, Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.11, pp541-556, 1983.
- [11] A.V. Fiacco, Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming., Academic Press, New York, 1983.
- [12] J. Semple and S. Zlobec, On the continuity of a lagrangian multiplier function in input optimization, Mathematical Programming, Vol.34, pp362-369, 1986.

- [13] G.N. Vanderplaats and N. Yoshida, Efficient calculation of optimum design sensitivity, AIAA J., Vol.23(11), pp1798-1803, 1985.
- [14] J. Sobieszcanski-Sobieski, J. Barthelemy and K.M. Riley, Sensitivity of optimum solutions of problem parameters, AIAA J., Vol.20(9), pp1291-1299, 1982.
- [15] E.J. Haug and J. Cea (eds.), Optimization of Distributed Parameter Structures, Sijthoff & Noordhoff, 1981.
- [16] E.A. Sedek, Dynamic optimization of framed structures with variable layout, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.23, pp1273-1294, 1986.
- [17] G.V. Loganathan, Benefit-cost problems: A bi-criteria approach, Engineering Optimization, Vol.13, pp225-234, 1988.
- [18] C.C. Hsieh and J.S. Arora, Design sensitivity analysis and optimization of dynamic response, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.43, pp195-219, 1984.
- [19] U. Kirsch, Optimal topologies of truss structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.72, pp15-28, 1989.
- [20] J.M.T. Thompson and G.W. Hunt, A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [21] M.P. Kamat, N.S. Khot and V.B. Venkayya, Optimization of shallow trusses against limit point instability, AIAA J., Vol.22(3), pp403-408, 1984.
- [22] J. Roorda, On the buckling of symmetric structural systems with first and second order imperfection, Int. J. Solids Struct., Vol.4, pp1137-1148, 1968.

1.2 発表論文リスト

論文

- [1] Optimum plastic design of large regular trusses and control of member force distributions, in: Proc. IASS Symposium, Shells, Membranes and Space Frames, Vol.3, pp199-206, 1986. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [2] Sequential optimal truss generator for frequency ranges, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.67(2), pp189-209, 1988. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [3] 曲率半径をサブパラメタとした振動数領域に対する最適円筒状立体トラス生成法, 構造工学論文集, Vol.35B, pp103-110, 1989. (共著 中村恒善)
- [4] Sequential generator of earthquake-response constrained trusses for design strain ranges, Comput. & Struct., Vol.33(6), pp1403-1416, 1989. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [5] Sequential generator of optimal structures for candidate frequency ranges, in: Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, Proc. OPTI91, Cambridge, MA, C.A. Brebbia and S. Hernandez (eds.), Elsevier, London, pp221-232, 1991. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [6] Sequential generator of earthquake-strain constrained curved space trusses for design strain ranges, in: Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, Proc. OPTI91, Cambridge, MA, C.A. Brebbia and S. Hernandez (eds.), Elsevier, London, 233-244, 1991. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [7] A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.94(1), pp113-129, 1992. (with Tsuneyoshi Nakamura)
- [8] Inverse generation of earthquake-strain constrained designs of a distributed parameter structure for a sequence of design strain functions, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.98(1), pp1-21, 1992. (with Tsuneyoshi Nakamura and T. Masui)
- [9] A direct application of parametric programming techniques to constrained optimization problems, in: Proc. 4th AIAA/AF/NASA/OAI Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, pp1058-1068, 1992. (with J.S. Arora)
- [10] A direct application of higher order parametric programming techniques to structural optimization, To appear in Int. J. Numer. Meth. Engng. (with J.S. Arora)

総説

- [11] 最適設計への期待, 建築雑誌, Vol.106(1308), pp60, 1991.

研究発表(梗概)

- [12] 指定1次固有値に関するテラー展開手法によるトラスの最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東海), 構造 I, pp1125-1126, 1985. (共著 中村恒善)
- [13] 大規模立体トラスの最適塑性設計及び崩壊時軸力分布の制御, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北海道), 構造 I, pp271-272, 1986. (共著 中村恒善)
- [14] 大規模弾性立体トラスの地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集(近畿), 構造 I, pp1307-1308, 1987. (共著 中村恒善, 草場茂樹)
- [15] 振動数領域に対する最適円筒状立体トラスの順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 構造 I, pp1377-1378, 1988. (共著 中村恒善)
- [16] 振動数領域に対する最適耐震壁梁の順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 構造 I, pp177-178, 1988. (共著 中村恒善, 小原 貢)
- [17] 振動数領域に対する最適アーチの順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(関東), 構造 I, pp1379-1380, 1988. (共著 中村恒善, 梶井 健)
- [18] 複数座屈モード型固有値を有するトラスの順序集合, 日本建築学会近畿支部構造力学講究録, Vol.4, 構造物の新しい臨界状態とその解析法, pp141-150, 1989. (共著 中村恒善)
- [19] 振動数領域に対する最適サンドウィッチ平板の順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), 構造 I, pp399-400, 1989. (共著 中村恒善)
- [20] 極限点荷重係数制約条件下のトラスの最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集(九州), 構造 I, pp1127-1128, 1989. (共著 中村恒善, 藤原誠二)
- [21] 振動数領域に対する最適1次元連続体の順序集合生成法, 日本建築学会近畿支部構造力学講究録, Vol.6, 梁, 梁-柱, 一次元分布質量構造物モデルの力学, pp21-30, 1989. (共著 中村恒善)
- [22] 設計ひずみ領域に対する地震時応答ひずみ制約設計トラスの順序集合生成法, 第39回応用力学連合講演会講演予稿集, pp201-204, 1989. (共著 中村恒善)
- [23] 指定1次固有振動数を有する平面トラスの最適部材配置の自然生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国), 構造 I, pp1293-1294, 1990. (共著 中村恒善)
- [24] 逆問題的定式化による地震時応答制約設計梁の順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国), 構造 I, pp1101-1102, 1990. (共著 中村恒善, 梶井 健)
- [25] Geometrical optimization of elastically supported doubly curved space trusses designed for specified earthquake-strains, in: Proc. IV-ICCCBE, JSCE and AIJ, Tokyo, pp337, 1991. (with Tsuneyoshi Nakamura)

- [26] 設計歪分布の順序集合に対する地震時応答制約設計アーチの逆生成子, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), 構造 I, pp757-758, 1991. (共著 中村恒善, 山崎英一)
- [27] 多成分地震応答歪・加速度制約設計トラスの順序集合生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 構造 I, pp1747-1748, 1992. (共著 中村恒善, 瀧 正哉)

2 章 最適解順序集合生成法及び不要変数選定法

2.1 序

数理計画問題は、線形あるいは非線形の制約条件の下で、1つあるいは複数の目的関数を最大化あるいは最小化する解(最適解)を求める問題であり、1940年代に発展した線形計画法に始まり、非線形計画法、多目的計画法等の多くの理論が存在する[1-5]。線形あるいは非線形計画問題において、変数とは別にいくつかのパラメーターが存在する問題は、パラメトリック最適化問題とよばれる。等式あるいは不等式制約条件を有する非線形計画問題を解く古典的手法である、sequential unconstrained minimization technique[5]あるいはaugmented Lagrangianに基づく手法[4]でのペナルティー項の重み係数も、パラメーターの1つである。これらの手法において、パラメーターを離散的に変更して、制約条件のない非線形計画問題を逐次解くことによって、もとの制約条件付きの非線形計画問題の解が得られることが証明されている[3]。

1980年代に入って、1つあるいは複数のパラメーターを有する一般的なパラメトリック最適化問題に対し、その最適解の、パラメーターを微小量変化させたときの変化(sensitivity)及び、パラメーターの有限量の変化を考えたときの解の特性(stability)の解析についての研究がなされるようになった[6-19]。その最も単純な場合として、制約条件式の右辺にパラメーターが存在する場合(right hand side perturbation method)に関しては、多くの理論的研究が存在する[7]。さらに、線形計画問題に対しては、パラメーターが目的関数に存在する場合及び、制約条件式に存在する場合それぞれについて多数の研究がなされており[19]、問題の単純性のため残された課題はほとんどないようにみられる。

ところで、非線形計画問題は、Fritz-John条件あるいはKuhn-Tucker条件[20,21]及び、等号で満たされる制約条件で構成される非線形方程式系を解く問題に帰せられる。したがって、1つのパラメーターを含む非線形計画問題に対する最適解(Kuhn-Tucker point)の集合は、homotopy method[22,23]等のcontinuation methodを用いて求めることができ、その経路のcontinuity[8,9]、bifurcation[10,11]等に関して多くの研究がなされている。また、最適解における目的関数の上限値あるいは下限値を求めるための理論[12]に関する成果も得られている。

これらの論文では、数学的には有意義な成果が得られているが、その理論を用いて最適解を求めるためには、初期解をいかに得るかという点において問題があるように思われる。一方、工学の分野でも、指定1次固有値等の制約条件を規定する1つのパラメーターに関する、最適設計解及びそれに対応する目的関数の値のsensitivity(optimum design sensitivity)を求める問題について、いくつかの論文が発表されている[24-30]。これらの論文でも、パラメーターを多少変化させたときの、目的関数及び最適設計解の変化を知ることが目的とし、何らかの数理計画法に基づく数値的手法により、最適設計解がすでに得られていることを前提としている。また、パラメーターを変化させたときに等号

で満たされる不等式制約条件 (active な制約条件) の数が変化する場合も考慮し、さらに、設計変数の高階の微分係数まで考慮した論文は少ない。

本章では、変数に対して最小制限値が存在し、目的関数及び制約条件についていくつかの単調性の条件が成立するような、工学的に重要な非線形計画問題に対し、すべての変数とその最小制限値に一致するような自明な最適解を初期解とする最適解順序集合の概念を新たに導入し、制約条件を規定する1つのパラメーターに関するテイラー展開により最適解の集合を求める手法を開発するとともに、その理論的正当性を明らかにする。さらに、対象とする非線形計画問題に対して成立する種々の条件を有効に用い、最適解の経路の唯一性が成立するための条件を明解な形で示す。本理論に基づく数値的手法は、種々のパラメーター値に対応する最適解を求める場合に有効であることはもちろんのこと、指定1次固有値を有する構造物の最適設計問題において1次固有値が重複する場合等の、既往の数値計画法に基づく手法の適用が困難であるような問題に対しては、1つのパラメーター値に対応する最適解のみが必要な場合にも有効である。また、変数に対する最小制限値制約条件を規定するパラメーターに関するテイラー展開により、最小制限値が0であるような問題に対する最適解を求めることにより、不要な変数を選別するための理論及び数値的手法を展開する。

本章で用いる記号の定義を以下に示す。

$F(\mathbf{x})$	目的関数
$G_i(\mathbf{x}, \theta)$	不等式制約条件を表わす関数
$G_i^A(\mathbf{x}, \theta)$	Active な不等式制約条件を表わす関数
$h(\mathbf{x}, \theta)$	等式制約条件を表わす関数
k	不等式制約条件の数
k^A	Active な不等式制約条件の数
n	変数の数
n^A	Active な変数の数
n^I	Inactive な変数の数
$\mathbf{p} = \{p_i\}$	制約条件を規定するパラメーターベクトル
$\mathbf{p}^b = \{p_i^b\}$	\mathbf{p} に対する基本ベクトル
$\mathbf{q} = \{q_i\}$	\mathbf{x} の最小制限値ベクトルを定めるパラメーターベクトル
$\mathbf{q}^A = \{q_i^A\}$	\mathbf{x}^A の最小制限値を定めるパラメーターベクトル
$\mathbf{q}^{Ab} = \{q_i^{Ab}\}$	\mathbf{q}^A の基本ベクトル
$\mathbf{q}^b = \{q_i^q\}$	\mathbf{q} の基本ベクトル

$\mathbf{x} = \{x_i\}$	変数ベクトル
$\mathbf{x}^A = \{x_i^A\}$	Active な変数のベクトル
$\mathbf{x}^I = \{x_i^I\}$	Inactive な変数のベクトル
$\hat{\mathbf{x}}(\theta)$	θ をパラメーターとした最適解順序集合
$\check{\mathbf{x}}(\xi)$	ξ をパラメーターとした最適解順序集合
$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_i\}$	不等式制約条件に対応するラグランジュ乗数ベクトル
$\boldsymbol{\mu}^A = \{\mu_i^A\}$	Active な不等式制約条件に対応するラグランジュ乗数ベクトル
$\boldsymbol{\nu} = \{\nu_i\}$	変数の最小制限値に対応するラグランジュ乗数ベクトル
$\boldsymbol{\nu}^A = \{\nu_i^A\}$	Active な変数に対応するラグランジュ乗数ベクトル
$\boldsymbol{\nu}^I = \{\nu_i^I\}$	Inactive な変数に対応するラグランジュ乗数ベクトル
θ	パラメーターベクトル \mathbf{p} を定めるスカラーパラメーター
ξ	パラメーターベクトル \mathbf{q} を定めるスカラーパラメーター

2.2 パラメトリック最適化問題の定式化及び最適性条件

n 個の変数からなるベクトルを $\mathbf{x} = \{x_i\}$ とする。不等式制約条件を表わす関数に、パラメーターベクトル $\mathbf{p} = \{p_i\}$ が含まれ、 \mathbf{p} が基本ベクトル \mathbf{p}^b 及び、1つのスカラーパラメーター θ を用いて

$$\mathbf{p} = \theta \mathbf{p}^b \quad (2.1)$$

のように表わされる場合を考える。このとき、 k 個の不等式制約条件を

$$G_i(\mathbf{x}, \theta) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (2.2)$$

のように定め、これを

$$G(\mathbf{x}, \theta) \leq 0 \quad (2.3)$$

のように表わす。さらに、 \mathbf{x} の最小制限値を与えるパラメーターベクトル \mathbf{q} が、基本ベクトル \mathbf{q}^b 及び1つのスカラーパラメーター ξ を用いて

$$\mathbf{q} = \xi \mathbf{q}^b \quad (2.4)$$

のように表わされるものとする。目的関数 $F(\mathbf{x})$ にはパラメーターは含まれないものとする。このとき、最小化問題を次のように定式化する。

[Problem OP1]

不等式制約条件

$$G(x, \theta) \leq 0 \quad (2.5)$$

及び、最小制限値制約条件

$$\xi q^b - x \leq 0 \quad (2.6)$$

の下で、目的関数

$$F(x) \quad (2.7)$$

を最小にするような最適解を求めよ。

ここでは、簡単のため不等式制約条件のみを考えたが、等式制約条件 $h(x, \theta) = 0$ も容易に考慮することができる。第 i 成分が $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ であるような列ベクトルを F, x のように書く。さらに、第 i 行第 j 列が $\frac{\partial G_j}{\partial x_i}$ であるような行列を G, x で表わす。また、引数 x 及び θ は省略する。 μ 及び ν を、それぞれ制約条件 (2.5) 及び (2.6) に対応するラグランジュ乗数ベクトルとすると、最適性条件 (Kuhn-Tucker 条件)[20,21] は次のようになる。

$$F, x + G, x \mu - \nu = 0 \quad (2.8)$$

$$\mu^T G = 0 \quad (2.9)$$

$$\nu^T (\xi q^b - x) = 0 \quad (2.10)$$

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0 \quad (2.11a, b)$$

ここで、上添字 T はベクトルあるいは行列の転置を表わす。

2.3 パラメター θ に関する最適解の感度解析

パラメター ξ が固定されたとき、Problem OP1 に対する最適解は、 θ を指定することにより決定される。したがって、最適解は θ の関数と考えられ、それを $\hat{x}(\theta)$ のように書く。このとき、 $\hat{x}(\theta)$ は θ をパラメターとした最適解の集合を形成する。本節では、 $\hat{x}(\theta)$ の θ に関する微分係数 (optimum design sensitivity) を求める手法の概要を示す。本節の内容は、すでに他の研究者により文献 [24-30] で展開されている理論に若干の修正を加えたものである。

パラメター θ の1つの値 θ_0 に対する最適解 $\hat{x}(\theta_0)$ が得られているとき、 θ_0 の近傍の θ の値に対応する最適解は、次のような θ に関する1次式で近似することができる。

$$\hat{x}(\theta) \simeq \hat{x}(\theta_0) + \left. \frac{d\hat{x}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \quad (2.12)$$

したがって、 θ_0 の近傍の θ に対する最適解の近似解を得るためには、 $\hat{\mathbf{x}}(\theta)$ の θ に関する optimum design sensitivity を求める必要がある。Optimum design sensitivity を求める手法に関しては、多くの論文が発表されているが [24-30]、工学の分野において重要な、変数に対する最小制限値の与えられた問題に対し、明解な定式化を行なった例はみられない。そこで、本節では、まず最小制限値ベクトル \mathbf{q} の固定された場合すなわち ξ の固定された場合について、最適解及び、それに対応する目的関数の値 (最適目的関数値) の optimum design sensitivity を求める手法について概説する。

いま、 F 及び G についても新しい関数 $\hat{F}(\theta) = F(\hat{\mathbf{x}}(\theta))$ 及び $\hat{G}(\theta) = G(\hat{\mathbf{x}}(\theta), \theta)$ を定義する。以後、上添字 $\hat{}$ はその関数が θ の関数であることを意味するものとする。 k^A 個の active な制約条件を $G^A(\mathbf{x}, \theta) = \{G_i^A(\mathbf{x}, \theta)\}$ のように書く。すなわち、

$$G_i^A(\mathbf{x}, \theta) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k^A) \quad (2.13)$$

である。さらに、 $x_i > q_i$ を満たすような n^I 個の変数 (inactive な変数) からなるベクトルを $\mathbf{x}^I = \{x_i^I\}$ 、 $x_i = q_i$ を満たすような n^A 個の変数 (active な変数) からなるベクトルを $\mathbf{x}^A = \{x_i^A\}$ とする。 θ のある値 θ_0 に対する最適化問題の最適解において active であった条件は、 θ_0 の近傍の θ の値においても active であることを保持するものとする。Inactive な条件及び変数に対しても同様である。このとき、明らかに

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^A}{d\theta} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\hat{G}^A}{d\theta} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.14a, b)$$

が成立する。ここで、(2.1) より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^A}{\partial \theta} &= G_{,\mathbf{p}}^{AT} \frac{d\mathbf{p}}{d\theta} \\ &= G_{,\mathbf{p}}^{AT} \mathbf{p}^b \end{aligned} \quad (2.15)$$

が成立することを用いると、(2.14b) は

$$G_{,\mathbf{x}^I}^{AT} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} + G_{,\mathbf{p}}^{AT} \mathbf{p}^b = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

のように書ける。 \mathbf{x}^I に対応する最小制限値のベクトルを \mathbf{q}^I 、制約条件 $\mathbf{q}^I - \mathbf{x}^I \leq \mathbf{0}$ に対応するラグランジュ乗数のベクトルを、 $\boldsymbol{\nu}^I$ とすると、(2.10) より

$$\hat{\boldsymbol{\nu}}^I = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

を得る。 θ_0 の近傍の θ に対して (2.17) が成立するため、明らかに

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\nu}}^I}{d\theta} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

である。Inactive な変数に対する最適性条件は、(2.8) 及び (2.17) より

$$F_{,x^I} + G_{,x^I} \mu = 0 \quad (2.19)$$

のように書ける。さらに、(2.9) 及び (2.11a) より、inactive な制約条件に対応するラグランジュ乗数の値は 0 であるから、(2.19) は

$$F_{,x^I} + G_{,x^I}^A \mu^A = 0 \quad (2.20)$$

のようになる。ここで、 $\mu^A = \{\mu_i^A\}$ は active な制約条件に対応するラグランジュ乗数のベクトルである。ゆえに、(2.8) の両辺を θ で微分し、(2.1) 及び (2.14a) を用いると、

$$F_{,x^I x^I} \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} + \sum_{j=1}^{k^A} \left\{ \mu_j^A G_{j,x^I x^I}^A \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} + \mu_j^A G_{j,x^I}^A p^b + G_{j,x^I}^A \frac{d\hat{\mu}_j^A}{d\theta} \right\} = 0 \quad (2.21)$$

を得る。ここで、 $G_{j,x^I}^A p$ は、第 i 行第 k 列が $\frac{\partial^2 G_j^A}{\partial x_i^I \partial p_k}$ であるような行列である。(2.16) 及び (2.21) より、変数及びラグランジュ乗数の θ に関する optimum design sensitivity を求めるための次のような連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \left[F_{,x^I x^I} + \sum_{j=1}^{k^A} \left(\mu_j^A G_{j,x^I x^I}^A \right) \right] & [G_{,x^I}^A] \\ [G_{,x^I}^A]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} \\ \frac{d\hat{\mu}_j^A}{d\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^{k^A} \left(\mu_j^A G_{j,x^I}^A p^b \right) \\ -G_{,p}^A p^b \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

(2.22) の両辺を順次 θ で微分することにより、高階の微分係数を求める式が得られる。また、それらの式で左辺の行列は変化しない。

最適目的関数値の θ に関する微分係数は、

$$\frac{d\hat{F}}{d\theta} = F_{,x^I}^T \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} \quad (2.23)$$

となる。(2.20) の両辺の転置をとり、 $\frac{d\hat{x}^I}{d\theta}$ を右から乗ずると、次式を得る。

$$F_{,x^I}^T \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} + \mu^{AT} G_{,x^I}^{AT} \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} = 0 \quad (2.24)$$

さらに、(2.16) の両辺に左から μ^{AT} を乗じ、(2.24) を用いると、

$$F_{,x^I}^T \frac{d\hat{x}^I}{d\theta} = \mu^{AT} G_{,p}^{AT} p^b \quad (2.25)$$

を得る。(2.23) 及び (2.25) より、最適目的関数値の θ に関する微分係数は、次式で表わされる。

$$\frac{d\hat{F}}{d\theta} = \mu^{AT} G_{,p}^{AT} p^b \quad (2.26)$$

以上の式展開は、すでに一般的な定式化がなされているが [24-26]、それらの定式化では x に対する最小制限値に関する制約条件 (2.6) も (2.5) に含められるものと考えなければならず、 $\frac{d\hat{\nu}}{d\theta}$ も未知数に含まれることになり、連立 1 次方程式 (2.22) のサイズが非常に大きくなる。したがって、ここでは (2.6) の形の制約条件が存在する場合について、特に有効な表現を示した。

2.4 パラメター ξ に関する最適解の感度解析

パラメター θ が固定されたとき、Problem OP1 に対する最適解は ξ を指定することにより決定される。したがって、最適解は ξ の関数と考えられ、それを $\tilde{x}(\xi)$ のように書く。このとき、 $\tilde{x}(\xi)$ は ξ をパラメターとした最適解の集合を形成する。本節では、2.3 節と同様に、 ξ に関する optimum design sensitivity を求める手法について概説する。

パラメター ξ の 1 つの値 ξ_0 に対する最適解 $\tilde{x}(\xi_0)$ が得られているとき、 ξ_0 の近傍の ξ の値に対応する最適解は、次のような ξ に関する線形式で近似することができる。

$$\tilde{x}(\xi) \simeq \tilde{x}(\xi_0) + \left. \frac{d\tilde{x}}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} (\xi - \xi_0) \quad (2.27)$$

したがって、 ξ_0 の近傍の ξ に対応する最適解の近似解を得るためには、 $\tilde{x}(\xi)$ の ξ に関する optimum design sensitivity を求める必要がある。

2.3 節と同様に、Problem OP1 に対しては、変数に対する最小制限値を他の不等式制約条件とは別に考慮することにより、パラメター ξ を変動させる場合にも optimum design sensitivity を求める連立 1 次方程式を、簡単な形で表現することができる。 \mathbf{x}^A に対応する最小制限値のベクトルを \mathbf{q}^A とし、

$$\mathbf{q}^A = \xi \mathbf{q}^{Ab} \quad (2.28)$$

が成立するように \mathbf{q}^{Ab} を定めると、明らかに次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^A}{d\xi} &= \frac{d\mathbf{q}^A}{d\xi} \\ &= \mathbf{q}^{Ab} \end{aligned} \quad (2.29)$$

さらに、active な制約条件に対しては、

$$\frac{d\tilde{\mathbf{G}}^A}{d\xi} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

より、

$$\mathbf{G}_{,\mathbf{x}^I}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^I}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\mathbf{x}^A}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^A}{d\xi} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

が成立する。(2.29) を用いると、(2.31) は

$$\mathbf{G}_{,\mathbf{x}^I}^{AT} \frac{d\tilde{\mathbf{x}}^I}{d\xi} + \mathbf{G}_{,\mathbf{x}^A}^{AT} \mathbf{q}^{Ab} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

のように書ける。2.3 節と同様に、

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}^I &= \mathbf{0} \\ \frac{d\tilde{\nu}^I}{d\xi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.33a, b)$$

が成立するから、(2.8) の両辺を ξ で微分し、(2.29) を用いると、次式を得る。

$$F_{,x^I x^I} \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + F_{,x^I x^A} q^{Ab} + \sum_{i=1}^{k^A} \left\{ \mu_i^A G_{i,x^I x^I}^A \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + \mu_i^A G_{i,x^I x^A}^A q^{Ab} + G_{i,x^I}^A \frac{d\tilde{\mu}_i^A}{d\xi} \right\} = 0 \quad (2.34)$$

(2.32) 及び (2.34) より、 ξ に関する optimum design sensitivity を求める連立 1 次方程式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \left[F_{,x^I x^I} + \sum_{i=1}^{k^A} \left(\mu_i^A G_{i,x^I x^I}^A \right) \right] & [G_{,x^I}^A] \\ [G_{,x^I}^A]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} \\ \frac{d\tilde{\mu}_j^A}{d\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{,x^I x^A} q^{Ab} - \sum_{i=1}^{k^A} \mu_i^A G_{i,x^I x^A}^A q^{Ab} \\ -G_{,x^A}^A q^{Ab} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

ここでも、変数に対する最小制限値を不等式制約条件と独立に取り扱ったことにより、(2.35) の連立 1 次方程式のサイズは inactive な変数の数 n^I に依存し、全体の変数の数 n には関係しない。

最適目的関数値に関しては

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{F}}{d\xi} &= F_{,x^I}^T \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + F_{,x^A}^T \frac{d\tilde{x}^A}{d\xi} \\ &= F_{,x^I}^T \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + F_{,x^A}^T q^{Ab} \end{aligned} \quad (2.36)$$

を得る。(2.20) の両辺の転置をとり、右から $\frac{d\tilde{x}^I}{d\xi}$ を乗じると、次式を得る。

$$F_{,x^I}^T \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + \mu^{AT} G_{,x^I}^A \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} = 0 \quad (2.37)$$

(2.36) 及び (2.37) より、

$$\frac{d\tilde{F}}{d\xi} = -\mu^{AT} G_{,x^I}^A \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + F_{,x^A}^T q^{Ab} \quad (2.38)$$

が成り立ち、(2.32) の両辺に左から μ^{AT} を乗じると、

$$\mu^{AT} G_{,x^I}^{AT} \frac{d\tilde{x}^I}{d\xi} + \mu^{AT} G_{,x^A}^{AT} q^{Ab} = 0 \quad (2.39)$$

を得る。Active な変数に対しては、(2.8) は

$$F_{,x^A} + G_{,x^A}^A \mu^A - \nu^A = 0 \quad (2.40)$$

のように書ける。ここで、 ν^A は x^A に対応するラグランジュ乗数ベクトルである。(2.40) の両辺に左から q^{AbT} を乗じ転置をとると、

$$F_{,x^A}^T q^{Ab} + \mu^{AT} G_{,x^A}^{AT} q^{Ab} - \nu^{AT} q^{Ab} = 0 \quad (2.41)$$

を得る。(2.38) 及び (2.41) より、最適目的関数値の微分係数は

$$\frac{d\tilde{F}}{d\xi} = \nu^{AT} q^{Ab} \quad (2.42)$$

で与えられることがわかる。(2.42) より、 $\frac{d\tilde{F}}{d\xi} \geq 0$ である。ここで、等号は、全変数に対して $x_i > q_i$ が成立し、 q_i が存在することが最適解に影響を及ぼさない場合に成り立つ。

2.5 最適解順序集合の定義

Problem OP1 に対する最適解は、 θ 及び ξ の指定値ごとに決定されるため、 θ 及び ξ の関数と考えることができる。2.3 節及び 2.4 節では、最適解が θ あるいは ξ の関数と考えられることを用いて、1つの最適解が何らかの最適化アルゴリズムを用いて得られたとき、その近傍のパラメータ値に対応する最適解を線形式により近似する手法の概要を述べた。しかし、それらの手法では、何らかの方法で最適解が得られていなければならないこと及び、あるパラメータ値に対応する最適解の近傍の最適解しか求められないことに問題がある。

最適化問題 Problem OP1 を解くことは、最適性条件を構成する非線形方程式及び不等式の系 (2.8) ~ (2.11a, b) を解く問題に帰せられる。ところで、非線形方程式系において、1つのパラメータを導入し、そのパラメータのある値に対応する解が容易に得られるとき、その解を初期解として、そのパラメータに関するテイラー展開により目標とするパラメータ値に対応する解を得る手法は、continuation method[22,23] として知られている。いま、不等式を含む場合も、不等号で満たされる制約条件 (inactive な不等式制約条件) を考慮しなければ、同様の手法を用いて解を求めることができる。ところで、パラメータの初期値から目標値までの値に対応する解が意味のあるものである場合には、この手法を用いて多数の有意義な解が得られることになる。Continuation method を最適化問題に適用するためには、1つの初期最適解が、何らかの最適化手法を用いて得られていなければならない。しかし、1つの自明な最適解が存在する場合には、既往の最適化手法を用いずに、最適解の集合を得ることができる。

まず、 ξ が ξ_0 に固定されている場合を考える。このとき、最適解は θ のみの関数となり、それを $x_{\xi_0}^P(\theta)$ で表わす。ここで、以下のような単調性の条件を導入する。

- C1 $F(x)$ は x の狭義の単調増加関数である。
- C2 $G_i^A(x, \theta)$ は θ の狭義の単調増加関数である。

すべての変数がその最小制限値に一致するような初期解において、1つの不等式制約条件のみが active となるようなパラメター θ の値を $\theta^{(1)}$ とする。このとき、 θ の指定可能値を表わす集合 R_θ を次式で定義する。

$$R_\theta = \{\theta \mid \theta^{(1)} \leq \theta\} \quad (2.43)$$

このとき、 R_θ を定義域とした最適解の集合が定義できる。ところで、 R_θ は実数の集合であり、その要素間には全順序関係 [31] が成立する。ゆえに、 R_θ は全順序集合であり、最適解 $x_{\xi_0}^P(\theta)$ の集合は、全順序集合 R_θ を添字集合としてもつ集合族 [31] であるといえる。ここでは「 θ をパラメターとした最適解順序集合」を次のように定義する。

[定義 1] 単調性の条件 C1 及び C2 の成立するようなパラメトリック最適化問題 OP1 に対し、最適解の集合が、全順序関係の成立する集合 R_θ を添字集合としてもつ集合族で定義されるとき、全変数とその最小値に一致する自明な最適解を初期解とする最適解の集合を「 θ をパラメターとした最適解順序集合」とよぶ。

次に、 θ が θ_0 に固定されている場合を考える。このとき、最適解は ξ のみの関数となり、それを $x_{\theta_0}^P(\xi)$ で表わす。ここで、C1 に加えて以下のような単調性の条件が成立するものとする。

C3 q は ξ の狭義の単調増加関数である。

C3 は、 q_i^b のすべての成分が正であることを意味する。すべての変数とその最小制限値に一致するような初期解において、1つの不等式制約条件のみが active となるようなパラメター ξ の値を $\xi^{(1)}$ とする。このとき、 ξ の指定可能値を表わす集合 R_ξ を次式で定義する。

$$R_\xi = \{\xi \mid \xi \leq \xi^{(1)}\} \quad (2.44)$$

このとき、 R_ξ を定義域とした最適解の集合が定義できる。ところで、 R_θ と同様に R_ξ は実数の集合であり、その要素間には全順序関係が成立する。ゆえに、 R_ξ は全順序集合であり、最適解 $x_{\theta_0}^P(\xi)$ の集合は、全順序集合 R_ξ を添字集合としてもつ集合族である。ここでは「 ξ をパラメターとした最適解順序集合」を次のように定義する。

[定義 2] 単調性の条件 C1 及び C3 の成立するようなパラメトリック最適化問題 OP1 に対し、最適解の集合が、全順序関係の成立する集合 R_ξ を添字集合としてもつ集合族で定義されるとき、全変数とその最小値に一致する自明な最適解を初期解とする最適解の集合を「 ξ をパラメターとした最適解順序集合」とよぶ。

3章以降では、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値等の、最適設計問題を規定する1つのスカラーパラメターの連続集合を定義域とした、最適設計解順序集合を求めるための理論を展開する。さらに、指定パラメター値の増加あるいは減少にともなう最適設計解の変化について考察する。したがって、定義域としてのパラメター値の集合が、全順序関係の成立する連続集合であることが重要である。ゆえに、ここで「最適解順序集合」の概念を新たに定義した。

2.6 パラメター θ に関する最適解順序集合生成法

本節では、目的関数及び制約条件を表わす関数が、単調性の条件 **C1** 及び **C2** を満たす場合には、全ての変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解として、2.3 節で述べた θ に関する optimum design sensitivity を求める手法を用い、 θ に関する区分的テイラー展開手法により、最適解順序集合を生成することができることを示す。さらに、目的関数の θ に関する微分係数の特性について考察する。本手法によれば、すべての変数とその最小制限値に一致するような自明な最適解を初期解とするため、既往の最適化手法を全く用いる必要がなく、独立したアルゴリズムを構築することができる。

目的関数及び制約条件を表わす関数に対して、単調性の条件 **C1** 及び **C2** が成立する場合を考える。後の章で示すように、工学の分野の多くの最適化問題でこれらの条件は成立する。**C2** より、 θ を減少させると $G_i(\mathbf{x}, \theta)$ は減少するから、全変数とその最小制限値で定まるような解 $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ に対し、 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \theta) \leq \mathbf{0}$ が成立するような θ が存在する。解 $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ において、 $G_i(\mathbf{x}, \theta)$ の少なくとも1つが0であり、他は負であるような θ の値を $\bar{\theta}$ とすると、 $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ は、 $\theta = \bar{\theta}$ が与えられたときの Problem OP1 の制約条件を満たす解（許容解）である。さらに、**C1** より明らかに、 $F(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ で最小値をとるから、解 $\mathbf{x} = \mathbf{q}$ は $\theta = \bar{\theta}$ に対応する自明な最適解である。

ところで、(2.1) 及び (2.26) より、

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{F}}{d\theta} &= \mu^{AT} \mathbf{G}_{,\mathbf{p}}^{AT} \mathbf{p}^b \\ &= \mu^{AT} \frac{\partial \mathbf{G}^A}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (2.45)$$

が成立する。ゆえに、(2.11a) 及び **C2** より、 μ_i^A の少なくとも1つが正のとき、 $\hat{F}(\theta)$ は θ の狭義の単調増加関数である。したがって、 θ を $\bar{\theta}$ から増加させたとき、 $\hat{F}(\theta)$ は増加し、**C1** 及び $x_i \geq q_i$ より、1つあるいは複数の変数の値が増加することがわかる。簡単のため、 $\theta = \bar{\theta}$ において1つの制約条件 G_1 のみが active となっている場合を考える。このとき、(2.9) より

$$\mu_i = 0, \quad (i \neq 1) \quad (2.46)$$

が成立する。 θ を $\bar{\theta}$ から増加させたときに、最小制限値から増加しはじめる変数及び μ_1 の初期値は、以下のようにして求めることができる。

いま、変数 x_j が増加しはじめるものとする。このとき、(2.8) 及び (2.10) より、

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_j} = 0 \quad (2.47)$$

が成立する。また、(2.11a) より $\mu_1 \geq 0$ であり、**C1** より $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) が成立するから、(2.47) より、

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_j} < 0, \quad \mu_1 > 0 \quad (2.48a, b)$$

が成立しなければならないことがわかる。したがって、(2.47) より

$$\mu_1 = - \frac{\partial F}{\partial x_j} \bigg/ \frac{\partial G_1}{\partial x_j} \quad (2.49)$$

を得る。 x_j 以外の変数に対しては、(2.8) 及び (2.11b) より

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_i} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.50)$$

が成立する。(2.48b), (2.49) 及び (2.50) より、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x_i} &\geq - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F}{\partial x_i} \\ &= \left(\frac{\partial G_1}{\partial x_j} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.51)$$

(2.51) 及び $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ より、

$$\frac{\partial G_1}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial x_i} \geq \frac{\partial G_1}{\partial x_j} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.52)$$

を得る。以上より、全変数に対して $\frac{\partial G_1}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial x_i}$ の値を計算し、その値が最小となっている変数の値が増加し、 μ_1 の初期値は (2.49) で与えられることがわかる。

すべての初期値が得られると、(2.22) を用いて $\hat{\mu}_1$ 及び \hat{x}_j の θ に関する微分係数を求めることができる。必要ならば、高階の微分係数まで容易に求めることができ、 \hat{x}_j 及び $\hat{\mu}_1$ に対して次のようなテイラー展開式が得られる。

$$\begin{aligned} \hat{x}_j(\theta) &= q_j + \frac{d\hat{x}_j}{d\theta} \bigg|_{\theta=\bar{\theta}} (\theta - \bar{\theta}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\hat{x}_j}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=\bar{\theta}} (\theta - \bar{\theta})^2 + \dots \\ \hat{\mu}_1(\theta) &= \hat{\mu}_1(\bar{\theta}) + \frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} \bigg|_{\theta=\bar{\theta}} (\theta - \bar{\theta}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\hat{\mu}_1}{d\theta^2} \bigg|_{\theta=\bar{\theta}} (\theta - \bar{\theta})^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.53a, b)$$

また、 $\hat{x}_i = q_i$ である変数に対しては、(2.8) の両辺を θ で微分した式

$$F_{,xx} \frac{d\hat{x}}{d\theta} + \mu_1 G_{1,xx} \frac{d\hat{x}}{d\theta} + G_{1,x} \frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} + \frac{d\hat{\nu}}{d\theta} = 0 \quad (2.54)$$

を用いて $\hat{\nu}$ の微分係数を求めることができる。しかし、テイラー展開による誤差を小さくするためには、テイラー展開で得られた \hat{x} 及び $\hat{\nu}_1$ の値を (2.8) に代入することによって、active な変数に対応する ν の値を計算することが望ましい。 G_1 以外の inactive な制約条件に対応する G_i の値も同様に、 \hat{x} 及び θ を代入することによって求めることができる。

θ を $\bar{\theta}$ 増加させ、次の条件の1つが満たされると、その θ の値で連立1次方程式を再構成し、微分係数を求める。

- TPC 1** $x_i = q_i$ である変数に対応する ν_i の値が 0 となる。この条件が成立すると、以後 x_i は q_i から増加する。
- TPC 2** $x_i > q_i$ であった変数で、 $x_i = q_i$ が成立する。以後 $x_i = q_i$ が満たされる。
- TPC 3** $G_j = 0$ であった制約条件に対応する μ_j の値が 0 となる。以後 $G_j < 0$ となる。
- TPC 4** $G_j < 0$ であった制約条件で、 $G_j = 0$ となる。以後 $G_j = 0$ が満たされる。
- TPC 5** 1つの区間での θ の増加量が、あらかじめ定められた上限値 $\Delta\theta$ に一致する。

本手法によると、 $\bar{\theta}$ 近傍の θ の値だけでなく、有限区間内の θ の値に対応する最適解を良好な精度で求めることができる。したがって、本アルゴリズムは微分係数の存在が保証されるような問題に対しては非常に有効である。

いま、1つの制約条件 $G_1(\mathbf{x}, \theta)$ のみが active であり、C1 及び C2 に加えて

- C4** $G_1(\mathbf{x}, \theta)$ は θ の線形関数であり、(2.1)における θ の係数は \mathbf{x} に依存しない。
- C5** $F(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} の1次関数である。
- C6** 行列 $G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}$ は最適解において正定値である。

が成立するものとする。このとき、 $\hat{F}(\theta)$ は θ の単調増加凸関数であることを以下に示す。

$\hat{F}(\theta)$ の θ に関する微分係数は (2.45) で与えられる。(2.45) の両辺をさらに θ で微分し、C4 を用いると、 $\hat{F}(\theta)$ の2階微分係数に関して次式を得る。

$$\frac{d^2 \hat{F}}{d\theta^2} = \frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} \frac{\partial G_1}{\partial \theta} \quad (2.55)$$

(2.8) を用いると、(2.16) より

$$G_{1,\mathbf{x}'}^T \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} + \frac{\partial G_1}{\partial \theta} = 0 \quad (2.56)$$

を得る。さらに、C4 及び C5 を用いると、(2.21) より次式を得る。

$$\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} + G_{1,\mathbf{x}'} \frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} = 0 \quad (2.57)$$

(2.56) より

$$\frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} \frac{\partial G_1}{\partial \theta} = -\frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} G_{1,\mathbf{x}'}^T \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} \quad (2.58)$$

が成立し、(2.57) の両辺に左から $\frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta}$ を乗じ転置をとると

$$\frac{d\hat{\mu}_1}{d\theta} G_{1,\mathbf{x}'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} = -\mu_1 \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta}^T G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} \quad (2.59)$$

を得る。ゆえに (2.55)、(2.58) 及び (2.59) より

$$\frac{d^2 \hat{F}}{d\theta^2} = \mu_1 \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta}^T G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \frac{d\hat{\mathbf{x}}^I}{d\theta} \quad (2.60)$$

が成立する。ここで、C6 より、 $G_{1,x^i x^i}$ は最適解において正定値であるから、(2.60) 及び $\mu_1 > 0$ より、

$$\frac{d^2 \hat{F}}{d\theta^2} > 0 \quad (2.61)$$

となる。以上より、C1、C2 及び C4 ~ C6 が成立するとき、 $\hat{F}(\theta)$ は θ の単調増加凸関数であることが証明された。

2.7 パラメター ξ に関する最適解順序集合生成法

本節では、目的関数及び制約条件を表わす関数が単調性の条件 C1 及び C3 を満たす場合には、全ての変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解として、 ξ に関する区分的テイラー展開手法により、パラメター ξ に関する最適解順序集合を生成することができることを示す。本手法によれば、すべての変数とその最小制限値に一致するような自明な最適解を初期解とするため、既往の最適化手法を全く用いる必要がなく、独立したアルゴリズムを構築することができる。本手法は、2.8 節に示すように、不要な変数を選定する問題に対して適用することができる。

目的関数及び制約条件を表わす関数に対して、単調性の条件 C1 及び C3 が成立する場合を考える。 ξ の初期値 $\bar{\xi}$ が与えられたとき、 $\mathbf{x} = \bar{\xi} \mathbf{q}^b$ において $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \theta) \leq \mathbf{0}$ を満たすような θ が指定されているものとする。このとき、C1 より、 $\mathbf{x} = \bar{\xi} \mathbf{q}^b$ であるような解は $F(\mathbf{x})$ を最小にする解であるから、明らかに、最適解である。変数の初期値 $\mathbf{x} = \bar{\xi} \mathbf{q}^b$ に対応するラグランジュ乗数の初期値は、次のようにして求めることができる。

Case 1 [全ての制約条件が inactive なとき] 制約条件は存在しないのと同様であるから、 $\bar{\xi}$ の近傍において、最適解 $\tilde{\mathbf{x}}(\xi)$ は $\xi \mathbf{q}^b$ に一致し、 $\mathbf{G} < \mathbf{0}$ である。したがって、明らかに $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ である。

Case 2 [1つの制約条件が active なとき] 1つの active な制約条件を G_1 とする。このとき、以下のような2つの場合が考えられる。

Case 2.1 [$G_{1,x}^T \mathbf{q}^b \geq 0$ のとき] いま仮に、 ξ を減少させたとき、全ての変数とその最小制限値 $\mathbf{q} = \xi \mathbf{q}^b$ に一致して減少するものと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d\check{G}_1}{d\xi} &= G_{1,x}^T \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\xi} \\ &= G_{1,x}^T \mathbf{q}^b \end{aligned} \quad (2.62)$$

であるから、 $\frac{d\check{G}_1}{d\xi} \geq 0$ が成立し、 ξ を減少させることにより G_1 の値が増加することはないから $G_1 \leq 0$ が満たされる。したがって、この場合には最小制限値から増加し始める変数は存在せず、 G_1 に対応するラグランジュ乗数 μ_1 の値は 0 である。

Case 2.2 [$G_{1,x}^T q^b < 0$ のとき] ξ を減少させたとき、全ての変数がその最小制限値 $q = \bar{\xi} q^b$ に一致して減少するものと仮定すると、(2.62) より G_1 は増加し $G_1 > 0$ となり、制約条件が満たされなくなる。したがって、少なくとも1つの変数 x_j に対して、 $x_j > \xi q_j^b$ が成立しなければならない。 ξ を $\bar{\xi}$ から増加させたときに、最小制限値から増加し始める変数及び μ_1 の初期値は、2.6 節と同様にして求めることができる。

全ての変数及びラグランジュ乗数の初期値が得られると、(2.35) を用いて $\tilde{\mu}_1$ 及び \tilde{x}_j の ξ に関する微分係数を求めることができる。必要ならば、高階の微分係数まで容易に求めることができ、 \tilde{x}_j 及び $\tilde{\mu}_1$ に対して次のようなテイラー展開式が得られる。

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(\xi) &= q_j + \left. \frac{d\tilde{x}_j}{d\xi} \right|_{\xi=\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\tilde{x}_j}{d\xi^2} \right|_{\xi=\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots \\ \tilde{\mu}_1(\xi) &= \tilde{\mu}_1(\bar{\xi}) + \left. \frac{d\tilde{\mu}_1}{d\xi} \right|_{\xi=\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\tilde{\mu}_1}{d\xi^2} \right|_{\xi=\bar{\xi}} (\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots\end{aligned}\quad (2.63a, b)$$

また、 $\tilde{x}_i = q_i$ である変数に対しては、(2.8) の両辺を ξ で微分した式

$$F_{,xx} \frac{d\tilde{x}}{d\xi} + \mu_1 G_{1,xx} \frac{d\tilde{x}}{d\xi} + G_{1,x} \frac{d\tilde{\mu}_1}{d\xi} + \frac{d\tilde{\nu}}{d\xi} = 0 \quad (2.64)$$

を用いて $\tilde{\nu}$ の微分係数を求めることができる。しかし、テイラー展開による誤差を小さくするためにはテイラー展開で得られた \tilde{x} 及び $\tilde{\mu}_1$ の値を (2.8) に代入することによって、active な変数に対応する ν の値を計算することが望ましい。 G_1 以外の inactive な制約条件に対応する G_j の値も、同様に \tilde{x} を代入することによって求めることができる。

ξ を $\bar{\xi}$ 減少させ、次の条件の1つが満たされると、その ξ の値で連立1次方程式を再構成し、微分係数を求める。

TPC 1 $x_i = q_i$ である変数に対応する ν_i の値が 0 となる。この条件が成立すると、以後 x_i は q_i から増加する。

TPC 2 $x_i > q_i$ であった変数で、 $x_i = q_i$ が成立する。以後 $x_i = q_i$ が満たされる。

TPC 3 $G_j = 0$ であった制約条件に対応する μ_j の値が 0 となる。以後 $G_j < 0$ となる。

TPC 4 $G_j < 0$ であった制約条件で、 $G_j = 0$ となる。以後 $G_j = 0$ が満たされる。

TPC 5 1つの区間での ξ の減少量が、あらかじめ定められた上限値 $\Delta\xi$ に一致する。

本手法によると、 $\bar{\xi}$ 近傍の ξ の値だけでなく、有限区間内の ξ の値に対応する最適解を良好な精度で求めることができる。したがって、本アルゴリズムは微分係数の存在が保証されるような問題に対しては非常に有効である。

2.8 最適解順序集合生成法に基づく不要変数選定法

全変数に対して非負条件 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が与えられている問題を考える。3章以降の最適設計問題では、 \mathbf{x} はトラスの部材断面積のベクトルであり、非負条件は暗黙のうちに与えられている。不等式制約条件を定めるパラメータ θ は θ_0 に固定されているものとする。このとき、最小化問題を次のように定式化する。

[Problem OP2]

不等式制約条件

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \theta_0) \leq \mathbf{0} \quad (2.64)$$

及び、最小制限値制約条件

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (2.65)$$

の下で、目的関数

$$F(\mathbf{x}) \quad (2.66)$$

を最小にするような最適解を求めよ。

この問題は、何らかの数理計画法のアルゴリズムを用いて解くことができる。ここで、最小制限値制約条件 $x_i \geq 0$ が active となると、 $x_i = 0$ が成立するため、その変数は不要であることを示す。一般の数理計画問題では、最小制限値制約条件 $x_i \geq q_i$ の q_i が 0 である場合と、正の値をもつ場合では、何の区別もなされる必要はない。しかし、3章以降の力学的制約条件を有する最適設計問題では、 $x_i = 0$ が成立して不要となる変数が存在することは、問題の構造に大きく影響を及ぼし、 $q_i > 0$ である問題を解くためのアルゴリズムでは、 $q_i = 0$ である問題を解くことが困難である場合が多い。さらに、5章では、最適設計解において $x_i = 0$ すなわち部材断面積が 0 となるような不要部材を選別することにより、トラスの最適部材配置を生成する理論及び数値的手法を展開する。以上の理由により、 $x_i \geq 0$ の非負条件の与えられた最適化問題に対して特別に有効なアルゴリズムを提示することは有意義である。

パラメータ ξ が存在せず、 θ の固定された Problem OP2 を解くために、次のようなパラメトリック最適化問題を考える。

[Problem OP3]

不等式制約条件

$$G(\mathbf{x}, \theta_0) \leq 0 \quad (2.67)$$

及び、最小制限値制約条件

$$\xi \mathbf{q}^b - \mathbf{x} \leq 0 \quad (2.68)$$

の下で、目的関数

$$F(\mathbf{x}) \quad (2.69)$$

を最小にするような最適解を求めよ。

この問題は、Problem OP1において、パラメター θ が θ_0 に固定された特別な問題であり、パラメター ξ に関する最適解順序集合生成法をそのまま適用することができる。いま、単調性の条件 **C1** 及び **C3** が成立する場合を考える。このとき、全変数が最小制限値に一致するような解において (2.67) が満たされるような ξ の値を ξ^u とすると、解 $\mathbf{x} = \xi^u \mathbf{q}^b$ は、 $\xi = \xi^u$ としたときの Problem OP3 の最適解である。そこで、パラメター ξ に関する最適解順序集合生成法を用いて ξ を 0 まで減少させ、それに対応する最適解を求めることにより、 $\xi \geq 0$ のパラメター領域に対して最も目的関数値を小さくするような最適解すなわち Problem OP2 の最適解が求められ、 $x_i = 0$ が成立する変数を取り除くことにより、不要変数を選定することができる。本手法は、既往の最適化アルゴリズムを必要としない独立した手法であり、試行錯誤による繰り返し計算を含まないため、大規模最適化問題に対しても適用できる。また、本手法は 5 章で展開するトラスの最適部材配置生成法の基礎となるものである。

2.9 パラメターに関する微分係数が存在するための十分条件

2.3 節及び 2.4 節では、パラメター θ 及び ξ に関する最適解の微分係数を求める式 (2.22) 及び (2.35) を導いた。これらの式を用いて θ あるいは ξ に関する微分係数を求めることが可能であるための条件すなわち最適解集合の唯一性についてはいくつかの論文が発表されている。ここでは、変数に対する最小制限値を一般の不等式制約条件とは独立に取り扱い、種々の単調性の条件が成立する場合に対し、微分係数が存在するための十分条件を明解な形で導く。

(2.22) 及び (2.35) において、左辺の行列は同一である。したがって、この行列の特性を考察することにより、 θ 及び ξ に関する微分係数が存在するための条件を導くことができる。いま、1 つの制約条件 G_1 のみが active である場合を考える。このとき、 \mathbf{x}^I に関する n^I 次元空間で、**C5** 及び **C6** に加えて次の条件が満たされるものとする。

C7 ベクトル $G_{1,\mathbf{x}'}$ の少なくとも 1 つの成分は 0 でない。

(2.22) 及び (2.35) の左辺の行列を B とすると, **C5** より

$$B = \begin{bmatrix} [\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}] & \{G_{1,\mathbf{x}'}\} \\ \{G_{1,\mathbf{x}'}\}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

となる。 B の左側の行列 B_1 を

$$B_1 = \begin{bmatrix} [\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}] \\ \{G_{1,\mathbf{x}'}\}^T \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

で定義する。

以下では, B の列ベクトルが互いに独立でないものと仮定すると **C7** に反することを示して, B の列ベクトルが互いに独立であること, すなわち B が正則であることを示す。

いま, B の右側のベクトルが, 行列 B_1 の列ベクトルの線形結合として

$$\begin{Bmatrix} \{G_{1,\mathbf{x}'}\} \\ 0 \end{Bmatrix} = B_1 \mathbf{b} \quad (2.72)$$

と表わすことができるものと仮定する。(2.71) 及び (2.72) より

$$G_{1,\mathbf{x}'} = \mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'} \mathbf{b} \quad (2.73)$$

が得られる。**C6** より行列 $\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}$ は正則だから, (2.73) より

$$\mathbf{b} = [\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}]^{-1} G_{1,\mathbf{x}'} \quad (2.74)$$

が成立する。(2.72) を (2.74) に代入すると, その下側の式より

$$G_{1,\mathbf{x}'}^T [\mu_1 G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}]^{-1} G_{1,\mathbf{x}'} = 0 \quad (2.75)$$

を得る。**C6** より $G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}$ は正定値であるから, その固有値は全て正の値をとる。一方, $[G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}]^{-1}$ の固有値は $G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}$ の固有値の逆数であるから全て正であり, $[G_{1,\mathbf{x}'\mathbf{x}'}]^{-1}$ も正定値である。ゆえに, (2.75) が成立するためには

$$G_{1,\mathbf{x}'} = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

が満たされることが必要であり, **C7** に反する。ゆえに, **C5** ~ **C7** が成立するとき, 正方行列 B の列ベクトルは互いに独立である。したがって, B は正則行列であり, (2.22) あるいは (2.35) を解くことにより, 変数及びラグランジュ乗数の, θ あるいは ξ に関する微分係数をそれぞれ求めることができる。

2.10 2章の結論

本章では、最適解順序集合生成法及び不要変数選定法に関して次のような成果を得た。

1. 不等式制約条件を表わす関数及び、変数に対する最小制限値に対し、変数とは別にいくつかのパラメーターを含むパラメトリック最適化問題において、パラメーターに関して種々の単調性の条件が成立する場合に、すべての変数とその最小値に一致するような自明な最適解を初期解とする「最適解順序集合」の概念を新たに定義した。
2. 変数に対して最小制限値が存在し、目的関数及び制約条件を定める関数に対して種々の単調性の条件が成立するような、工学的に重要な最適化問題において、全変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解として、不等式制約条件あるいは最小値制約条件を定めるパラメーターに関するテイラー展開により、最適解順序集合を生成する理論及び数値的手法を展開した。本手法は、既往の最適化アルゴリズムを全く必要としない独立した手法である。
3. 変数に関して非負条件の存在する最適化問題に対して、補助的な正の最小制限値制約条件を有する最適化問題を定式化し、その最小制限値を規定するスカラーパラメーターに関するテイラー展開により最小制限値が 0 の場合の最適解を求めることにより、不要な変数を選別する手法を開発した。

参考文献

- [1] L.C.W. ディクソン, 非線形最適化計算法, 倍風館, 1974.
- [2] M.S. Bazaraa and C.M. Shetty, Nonlinear Programming, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [3] 坂和 愛幸, 最適化と最適制御, 森北出版, 1980.
- [4] D.A. Pierre and M.J. Lowe, Mathematical Programming Via Augmented Lagrangians, Addison-Wesley, London, 1975.
- [5] A.V. Fiacco and G.P. McCormic, Nonlinear Programming : Sequential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [6] J. Kyparisis, Uniqueness and differentiability of solutions of parametric nonlinear complementarity problems, Mathematical Programming, Vol.36, pp105-113, 1986.
- [7] A.V. Fiacco, Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming, Academic Press, New York, 1983.
- [8] J. Semple and S. Zlobec, On the continuity of a Lagrangian multiplier function in input optimization, Mathematical Programming, Vol.34, pp362-369, 1986.
- [9] K. Malanowski, Differentiability with respect to parameters of solutions to convex programming problems, Mathematical Programming, Vol.33, pp352-361, 1985.

- [10] H.T. Jongen, P. Jonker and F. Twilt, Critical sets in parametric optimization, *Mathematical Programming*, Vol.34, pp333-353, 1986.
- [11] A.B. Poore and C.A. Tjahjrt, Bifurcation problems in nonlinear parametric programming, *Mathematical Programming*, Vol.39, pp189-205, 1987.
- [12] A.V. Fiacco and J. Kyparisis, Computable bounds on parametric solutions of convex problems, *Mathematical Programming*, Vol.40, pp213-221, 1988.
- [13] S.M. Robinson, Perturbed Kuhn-Tucker points and rates of convergence for a class of nonlinear-programming algorithms, *Mathematical Programming*, Vol.7, pp1-16, 1974.
- [14] A. Shapiro, Second order sensitivity analysis and asymptotic theory of parametrized nonlinear programs, *Mathematical Programming*, Vol.33, pp280-299, 1985.
- [15] S. Sceder, Structure of the first-order solution set for a class of nonlinear programs with parameters, *Mathematical Programming*, Vol.34, pp84-110, 1986.
- [16] H. Väliäho, A unified approach to one-parametric general quadratic programming, *Mathematical Programming*, Vol.33, pp318-338, 1985.
- [17] S. Zlobec, Input optimization: I. Optimal realizations of mathematical models, *Mathematical Programming*, Vol.31, pp245-268, 1985.
- [18] A.V. Fiacco (ed.), *Mathematical Programming with Data Perturbations I, II*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol.73, 85, Mercel Dekker, New York, 1982, 1983.
- [19] T. Gal, *Postoptimal Analysis, Parametric Programming, and Related Topics*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [20] 坂口 実, 数理計画法, 培風館, 1968.
- [21] 刀根 薫, 数理計画, 朝倉書店, 1978.
- [22] L.T. Watson, Solving the nonlinear complementarity problem by a homotopy method, *SIAM J. Control Optimization*, Vol.17(1), pp36-46, 1979.
- [23] L.T. Watson and R.T. Haftka, Modern homotopy methods in optimization, *Comp. Meth. Appl. Meth. Engng.*, Vol.74, pp289-305, 1989.
- [24] L.A. Schmit and K.J. Chang, Optimum design sensitivity based on approximation concepts and dual method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.20, pp39-75, 1984.
- [25] H.M. Adelman and R.T. Haftka, Sensitivity analysis of discrete structural systems, *AIAA J.*, Vol.24(5), pp823-832, 1986.
- [26] G.N. Vanderplaats and N. Yoshida, Efficient calculation of optimum design sensitivity, *AIAA J.*, Vol.23(11), pp1798-1803, 1985.

- [27] J. Sobieszczanski-Sobieski, J. Barthelemy and K.M. Riley, Sensitivity of optimum solutions of problem parameters, AIAA J., Vol.20(9), pp1291-1299, 1982.
- [28] J. Barthelemy and J. Sobieszczanski-Sobieski, Optimum sensitivity derivatives of objective functions in nonlinear programming, AIAA J., Vol.21(6), pp913-915, 1983.
- [29] J. Barthelemy and J. Sobieszczanski-Sobieski, Extrapolation of optimum design based on sensitivity derivatives, AIAA J., Vol.21(5), pp797-799, 1983.
- [30] G.N. Vanderplaats, An efficient feasible directions algorithm for design synthesis, AIAA J., Vol.22(11), pp1633-1640, 1984.
- [31] 森田 紀一, 位相空間論, 岩波書店, 1981.

3 章 指定重複 1 次固有振動数を有する最適 トラスの順序集合生成法 †

3.1 序

指定 1 次固有振動数を有する構造物の最適設計問題に関しては、多くの論文が発表されており [1-15], トラスに対しても種々の数値的手法が存在する [1-5]。トラスの構造設計において、1 次固有振動数は動的剛性を代表する指標として、重要な力学的システムパラメータであり、地盤の卓越振動数を考慮することにより、地震動等の種々の動的外乱に対する共振を避けるためにも、指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適設計問題を考えることの、実用的意義は大きい。さらに、地震動等の動的な外乱に対する最大応答量を、モーダルアナリシスの手法を用いて評価するとき、1 次固有モード成分はその重要な部分を占めることから、本最適設計問題を考えることの意義は存在する。

ところで、指定 1 次固有振動数を有する平板状及び曲面板状立体トラスの最適設計問題では、多くの場合、その最適設計解において 1 次固有振動数 (1 次固有値) は重複し、複数の独立な 1 次固有モードを考慮した最適性条件を導入する必要がある [4]。しかし、1 次固有値が重複する場合には、既往の種々の最適化手法を拡張して最適設計解を求める上で、多くの困難点が存在し [16-25], 大規模トラスに対しても有効な手法は、著者らの論文 [26-29] 以外には存在しない。

中村らは、せん断型構造物及び平面骨組の最適設計問題に対して、多くの理論的及び実用的成果を得ている [30-47]。それらの論文では、対象とする構造物の規則性を利用した、種々の解析的表現及び設計公式が得られている。しかし、立体トラスに対しては、その幾何学的形状の複雑さのため、解析的表現を得ることは困難である。

本章では、2 章で示した「最適解順序集合生成法」に基づき、幾何学的形状の与えられたトラスに対し、指定 1 次固有振動数に対応する指定 1 次固有値をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、「最適設計解順序集合」を生成するための理論を展開する。ここで、設計変数は各部材の断面積である。本理論では、最適設計解を、制約条件を規定するパラメータの 1 つである指定 1 次固有値の関数と考えている。Optimum design sensitivity の分野の論文 [48-54] でも、最適設計解を最適設計問題を規定するパラメータの関数と考えた種々の理論が展開されているが、それらの論文では、最適設計解のパラメータに関する感度係数を求めているにすぎず、そのパラメータの連続的集合に対する最適設計解の集合を求めるという概念には至っていない。さらに、それらの論文では、何らかの既往の最適化手法を用いて 1 つの最適設計解が求められていなければならないという点に問題がある。

†3.2 節及び 3.3 節の一部は、すでに文献 [26] に発表済みである。また、3.5 節の一部は、すでに文献 [27] に発表済みである。

本章で示す「最適設計解順序集合生成法」を用いると、既往の最適化手法を全く用いず、固有値解析すら一度しか行なわずに、これまでに一般的手法の存在しなかった 1 次固有値が重複する場合も含めて、最適設計解順序集合を求めることができる。本手法を用いると、種々の幾何学的形状の立体トラスに対し、最適設計解順序集合を容易に求めることができ、指定 1 次固有値を固定したときの最適設計解を、幾何学的形状を規定するパラメータの関数と考えることにより、1 次固有値の指定値に対応して最適な幾何学的形状を得ることができる。また、本手法によれば、最適設計理論に基づく種々の設計図表を容易に得ることができ、設計者はそれらの設計図表をもとに、「最も望ましい」最適設計解を選択することができる。しかし、設計者にとっては、「最も望ましい」最適設計解に対する何らかの指標が存在した方がよい場合もある。本章では、fractional programming[55,56] の定式化に基づき、最適設計解順序集合から 1 つの最適設計解を選択するための理論を展開する。さらに、最小断面積制限値が存在しない場合について、断面積が全く存在しないトラスを初期設計解として、最適設計解順序集合を生成する新しい理論を展開する。また、例題では、最適設計解の指定 1 次固有値に関する微分係数が存在するための条件について考察し、指定することができる 1 次固有値の上限値についても検討する。

本章で用いる記号の定義を以下に示す。

$[\hat{\cdot}]$	Ω_a の関数
$[\cdot]^G$	R あるいは A 及び R の関数
$A = \{A_i\}$	部材断面積ベクトル
$\bar{A} = \{\bar{A}_i\}$	最小断面積制限値ベクトル
A^P	許容設計解に対応する部材断面積ベクトル
A^F, A^D	2 段階最適設計問題における最適設計解
C	W の Ω_a に対する比
f	変位の自由度
K	系剛性行列
K_i^*	系座標に関する、第 i 部材の単位断面積あたりの部材剛性行列
$L = \{L_i\}$	部材長ベクトル
M_D	部材質量に関する系質量行列
M_{Di}^*	系座標に関する、第 i 部材の単位断面積あたりの部材質量行列
M_J	節点集中質量に関する系質量行列
m	部材数

m^A	Active な部材の数
m^I	Inactive な部材の数
R	トラスの幾何学的形状パラメター
R_l	R に対する下限値
R_u	R に対する上限値
s	1 次固有値の重複度
W	全部材質量
\hat{W}_l	\hat{W} の下界
\hat{W}_u	\hat{W} の上界
Z	Ω_a と W の α 倍との差
α	2 段階最適設計問題を規定するパラメター
ε_i	Φ_1 に対応する第 i 部材のひずみ
Ω_r	r 次固有値
Ω_a^F, Ω_a^D	2 段階最適設計問題における最適指定 1 次固有値
Φ_r	r 次固有モード
Ω_a	指定 1 次固有値
ρ	部材の単位体積あたり質量
γ_r	ラグランジュ乗数

3.2 最適設計問題の定式化及び最適性必要十分条件

部材中心線形状及び支持条件の定められたトラスを考える。第 i 部材の断面積を A_i とし、 A_i の集合 $\{A_i\}$ をベクトル \mathbf{A} で表わす。トラスは \mathbf{A} で完全に決定されるため、 \mathbf{A} を設計変数ベクトルとよぶ。また、部材長の集合 $\{L_i\}$ をベクトル \mathbf{L} で表わす。節点は完全なピン接合とし、部材内の軸方向変位を部材端変位の 1 次関数で表わす。系座標に関する系剛性行列、部材質量による系コンシステント質量行列及び、節点集中質量による系質量行列をそれぞれ $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ 、 $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$ 及び \mathbf{M}_J で表わす。

r 次固有値及び r 次固有モードをそれぞれ $\Omega_r(\mathbf{A})$ 及び $\Phi_r(\mathbf{A})$ で表わすと、自由振動の方程式より次式を得る。

$$\mathbf{K}(\mathbf{A})\Phi_r(\mathbf{A}) = \Omega_r(\mathbf{A})\{\mathbf{M}_D(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J\}\Phi_r(\mathbf{A}) \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.1)$$

ここで、 f は変位の自由度である。正規化条件は次式で定める。

$$\Phi_r(\mathbf{A})^T \{ \mathbf{M}_D(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J \} \Phi_r(\mathbf{A}) = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.2)$$

ここで、上添字 T はベクトルの転置を表わす。(3.1) よりレイリー商は次のように書ける。

$$\Omega_r(\mathbf{A}) = \frac{\Phi_r(\mathbf{A})^T \mathbf{K}(\mathbf{A}) \Phi_r(\mathbf{A})}{\Phi_r(\mathbf{A})^T \{ \mathbf{M}(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J \} \Phi_r(\mathbf{A})} \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.3)$$

指定1次固有値を Ω_a ，第 i 部材の最小断面積制限値を \bar{A}_i とすると、最適設計問題を次のように定式化することができる。

[Problem ODF1]

1次固有値制約条件

$$\Omega_r(\mathbf{A}) \geq \Omega_a \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.5)$$

及び、最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.6)$$

の下で、全部材質量

$$W(\mathbf{A}) = \rho \sum_{i=1}^m (A_i L_i) \quad (3.7)$$

を最小にするような最適設計解を求めよ。

ここで、 ρ 及び m は、それぞれ部材の単位体積あたり質量及び、部材数である。最小断面積制限値は、極端に小さい断面積の部材が存在することを避けるために与えるものであり、例えば円筒部材で構成される立体トラスでは、部材半径が指定されたときの部材座屈軸力に関する条件に基づいて決定されるべきものである。また、1次固有値制約条件 (3.5) は、全ての固有値が指定値 Ω_a 以上でなければならないことを意味する。

トラス部材の剛性及び質量は A_i に比例するため、次のような定数行列 \mathbf{K}_i^* 及び \mathbf{M}_{Di}^* を定義することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* &= \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{A})}{\partial A_i} \\ \mathbf{M}_{Di}^* &= \frac{\partial \mathbf{M}_D(\mathbf{A})}{\partial A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.8a, b)$$

すなわち，行列 K_i^* 及び M_{Di}^* は，ともに f 行 f 列の行列であり，第 i 部材に関する項以外は全て 0 であるような，系座標に関する単位断面積あたりの部材剛性行列及び部材質量行列である。したがって，次式が成立する。

$$\begin{aligned} K(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^m (A_i K_i^*) \\ M_D(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^m (A_i M_{Di}^*) \end{aligned} \quad (3.9a, b)$$

1 次固有値の重複度を s とすると，Problem ODF1 に対する最適性必要条件 (Kuhn-Tucker 条件)[58] は，次のようになる [4,7,25,26,57]。

$$\begin{aligned} A_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \sum_{r=1}^s (\gamma_r \zeta_i^r) &= \rho L_i \\ A_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \sum_{r=1}^s (\gamma_r \zeta_i^r) &\leq \rho L_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.10a, b)$$

ここで， γ_r は非負のラグランジュ乗数であり， ζ_i^r は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \zeta_i^r &= \frac{\partial \Omega_r}{\partial A_i} \\ &= \Phi_r^T \{K_i^* - \Omega_a M_{Di}^*\} \Phi_r \quad (r = 1, 2, \dots, s), \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここで，(3.1) 及び (3.2) を用いた。最適性必要条件 (3.10a, b) が十分条件でもあることは，1 次固有値が重複しない場合には，文献 [7] と同様にして Rayleigh の原理を用いて証明することができる。重複する場合には，文献 [25] と同様にして証明することができる。

最小断面積制限値が指定されたとき，Problem ODF1 は Ω_a の指定値ごとに構成される。したがって，Problem ODF1 は，一般的に 2.1 節の Problem OP1 のように表現できるような，パラメータ Ω_a を含むパラメトリック最適化問題である。ゆえに，最適設計解は Ω_a のみの関数と考えることができ， Ω_a をパラメータとした「最適設計解順序集合」を形成する。次節では，パラメータ Ω_a に関する区分的テイラー展開により最適設計解の集合を生成する理論を展開する。さらに，例題では， Ω_a の増加にともなう最適設計解の変化について詳細に検討する。このとき， Ω_a が全順序関係の成立する実数値集合に属することが重要であるため，「最適設計解順序集合」の概念を新たに定義し，用いる必要がある。

3.3 指定 1 次固有値に関する区分的テイラー展開手法

Ω_a をパラメーターとした最適設計解順序集合を $\hat{\mathbf{A}}(\Omega_a)$ のように表わす。さらに、 r 次固有値及び r 次固有モードについても次の記号を用いる。

$$\begin{aligned}\Omega_r(\hat{\mathbf{A}}) &= \hat{\Omega}_r(\Omega_a) \\ \Phi_r(\hat{\mathbf{A}}) &= \hat{\Phi}_r(\Omega_a) \quad (r = 1, 2, \dots, f)\end{aligned}\quad (3.12a, b)$$

γ_r 及び ζ_i^r についても添字 $\hat{}$ を用いて新しい Ω_a の関数を定義する。最適設計解 $\hat{\mathbf{A}}(\Omega_a)$ 及びそれに対応する固有モード等は、 Ω_a に関して必要な階数まで連続微分可能な関数とする。このとき、1つの指定 1 次固有値の値 Ω_{a0} に対する最適設計解 $\hat{\mathbf{A}}(\Omega_{a0})$ が得られたならば、 Ω_{a0} の近傍の Ω_a の値に対応する最適設計解及びその r 次固有モードは、次のようなテイラー展開式で表現することができる。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\Omega_a) &= \hat{\mathbf{A}}(\Omega_{a0}) + \hat{\mathbf{A}}'(\Omega_{a0})(\Omega_a - \Omega_{a0}) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{A}}''(\Omega_{a0})(\Omega_a - \Omega_{a0})^2 + \dots \\ \hat{\Phi}(\Omega_a) &= \hat{\Phi}(\Omega_{a0}) + \hat{\Phi}'(\Omega_{a0})(\Omega_a - \Omega_{a0}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\hat{\Phi}''(\Omega_{a0})(\Omega_a - \Omega_{a0})^2 + \dots \quad (r = 1, 2, \dots, f)\end{aligned}\quad (3.13a, b)$$

ここで、添字 $'$ は Ω_a に関する微分を表わす。他の変数に対しても同様のテイラー展開表現を得ることができる。したがって、 Ω_a をパラメーターとした最適設計解順序集合を求める問題は、 $\hat{\mathbf{A}}(\Omega_a)$ 、 $\hat{\Phi}_r(\Omega_a)$ 等の Ω_{a0} における Ω_a に関する微分係数を求める問題に帰せられる。(3.1) 及び (3.2) の両辺を Ω_a で微分し、(3.8) を用いると、次の各式を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i' \mathbf{K}_i^*\} \hat{\Phi}_r + \hat{\mathbf{K}} \hat{\Phi}_r' &= \hat{\Omega}_r' \{\hat{\mathbf{M}}_D + \mathbf{M}_J\} \hat{\Phi}_r \\ &\quad + \hat{\Omega}_r \left[\sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i' \mathbf{M}_{Di}^*\} \hat{\Phi}_r + \{\hat{\mathbf{M}}_D + \mathbf{M}_J\} \hat{\Phi}_r' \right] \quad (r = 1, 2, \dots, f)\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\hat{\Phi}_r^T \left[\sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i' \mathbf{M}_{Di}^*\} \right] \hat{\Phi}_r + 2\hat{\Phi}_r^T \{\hat{\mathbf{M}}_D + \mathbf{M}_J\} \hat{\Phi}_r' = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.15)$$

ここで、簡単のため引数 Ω_a は省略した。(3.11) より次式を得る。

$$\hat{\zeta}_i^{r'} = 2\hat{\Phi}_r^T \{\mathbf{K}_i^* - \Omega_a \mathbf{M}_{Di}^*\} \hat{\Phi}_r' - \hat{\Phi}_r^T \mathbf{M}_{Di}^* \hat{\Phi}_r \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (3.16)$$

また、(3.10a, b) より、

$$\begin{aligned}\hat{A}_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \sum_{r=1}^s \{\hat{\gamma}_r' \hat{\zeta}_i^r + \hat{\gamma}_r \hat{\zeta}_i^{r'}\} = 0 \\ \hat{A}_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \hat{A}_i' = 0\end{aligned}\quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.17a, b)$$

表 3.1 微分係数を求めるための式及び変数の対応

式	変数	数
(3.14)	$\hat{\Phi}_r \ (r = 1, 2, \dots, s)$	$f \times s$
(3.15)	$\hat{\gamma}_r \ (r = 1, 2, \dots, s)$	s
(3.17a)	$\hat{A}_i \ (A_i > \bar{A}_i)$	m^I
		$f \times s + s + m^I$

が成立し、 $1 \sim s$ 次の固有値に対しては、 $\Omega_r = \Omega_a$ であるから、明らかに

$$\Omega'_r = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (3.18)$$

が成り立つ。

(3.14) ～ (3.18) は必要な階数まで Ω_a で微分することができ、連立 1 次方程式を解くことにより、 $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\Omega}_r$ 、 $\hat{\Phi}_r$ 及び $\hat{\gamma}_r \ (r = 1, 2, \dots, s)$ の Ω_a に関する微分係数が得られる。このとき、連立 1 次方程式を構成する行列は階数に依存しないため、1 度の LU 分解により、高階微分係数まで容易に得ることができる。式及び変数の対応を表 3.1 に示す。ここで、 m^I は $A_i > \bar{A}_i$ であるような「inactive な部材」の数である。

以上より、2.6 節でその一般的手法を示したような、以下のようなアルゴリズムを用いて、最適設計解順序集合を生成することができる。

[Step 1] 全ての部材の断面積がその最小制限値で定まるような、設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ に対して固有値解析を行ない、得られた単一 1 次固有値を $\bar{\Omega}$ とする。設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ は、どの部材の断面積も減少させることができないため、明らかに $\Omega_a = \bar{\Omega}$ が与えられたときの Problem ODF1 の最適設計解である。また、 $\Omega_a \geq \bar{\Omega}$ に対して、制約条件 (3.5) 及び (3.6) を満たす許容設計解が存在するものとする。

[Step 2] (3.11) を用いて ζ_i^1 を計算し、 $\zeta_i^1/(\rho L_i)$ が最大となっている部材を第 1 部材とする。第 1 部材で $\gamma_1 \zeta_i^1 = \rho L_i$ が成立するように γ_1 を決定すると、明らかに $i \neq 1$ に対しては、 $\gamma_i \zeta_i^1 \leq \rho L_i$ が成立する。最適性必要十分条件 (3.10a, b) から明らかなように、 Ω_a を $\bar{\Omega}$ から増加させると、第 1 部材の断面積がその最小制限値から増加する。

[Step 3] (3.17a, b) より、第 1 部材に対しては $\hat{\gamma}_1' \hat{\zeta}_i^1 + \hat{\gamma}_1 \hat{\zeta}_i' = 0$ であり、 $i \neq 1$ に対しては $\hat{A}_i' = 0$ である。さらに、(3.14) ～ (3.16) 及び (3.18) を用いることにより、 $(f+2)$ 元連立 1 次方程式を解き、 $\hat{A}_1'(\bar{\Omega})$ 、 $\hat{\Phi}_1'(\bar{\Omega})$ 及び $\hat{\gamma}_1'(\bar{\Omega})$ を求めることができる。

[Step 4] \hat{A}_1' が得られると、(3.14) 及び (3.15) ($r = 2, 3, \dots$) を用いて $\hat{\Phi}_r'$ 及び $\hat{\Omega}_r'$ ($r = 2, 3, \dots$) を必要な次数まで求めることができる。

[Step 5] (3.14) ~ (3.18) をさらに Ω_a で微分した式を用いて \hat{A}_1 , $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\Phi}_r$ 及び $\hat{\Omega}_r$ の微分係数を必要な階数まで求めることができ、次のようなテイラー展開式を得る。

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\Omega_a) &= \bar{A} + \hat{A}'(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega}) + \frac{1}{2}\hat{A}''(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega})^2 + \dots \\
\hat{\gamma}_1(\Omega_a) &= \hat{\gamma}_1(\bar{\Omega}) + \hat{\gamma}_1'(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega}) + \frac{1}{2}\hat{\gamma}_1''(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega})^2 + \dots \\
\hat{\Phi}(\Omega_a) &= \hat{\Phi}(\bar{\Omega}) + \hat{\Phi}'(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega}) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}''(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega})^2 + \dots \quad (r = 1, 2, \dots, f) \\
\hat{\Omega}_r(\Omega_a) &= \hat{\Omega}_r(\bar{\Omega}) + \hat{\Omega}_r'(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega}) + \frac{1}{2}\hat{\Omega}_r''(\bar{\Omega})(\Omega_a - \bar{\Omega})^2 + \dots \\
&\quad (r = 1, 2, \dots, f)
\end{aligned} \tag{3.19a ~ d}$$

$\hat{\zeta}_i^r$ に対しても同様のテイラー展開式を得ることができるが、誤差を少なくするため、 $\hat{\zeta}_i^r$ の値は (3.19b) で得られる $\hat{\Phi}_r$ を (3.11) に代入して求める。

[Step 6] Ω_a を $\bar{\Omega}$ から増加させ、次に $\hat{\gamma}_1\hat{\zeta}_i^1 = \rho L_i$ となる部材を第 2 部材とし、そのときの Ω_a の値を Ω_{a1} とする。 $\Omega_a = \Omega_{a1}$ での各微分係数を $\hat{\gamma}_1'\hat{\zeta}_i^1 + \hat{\gamma}_1\hat{\zeta}_i'^1 = 0$ ($i = 1, 2$) 及び $\hat{A}_i' = 0$ ($i \neq 1, 2$) を用いて求める。以後 [Step 4 ~ 6] を繰り返し、次の条件の 1 つが満たされると、連立 1 次方程式を再構成し、微分係数を求める。

TPC 1 $\sum_{r=1}^s (\hat{\gamma}_r \hat{\zeta}_i^r) < \rho L_i$ であった部材で $\sum_{r=1}^s (\hat{\gamma}_r \hat{\zeta}_i^r) = \rho L_i$ となる。以後 $A_i > 0$ が成立する。

TPC 2 $\hat{A}_i > \bar{A}_i$ であった部材で $\hat{A}_i = \bar{A}_i$ となる。以後 $A_i = \bar{A}_i$ が成立する。

TPC 3 Ω_r ($r > s$) が Ω_a に一致する。以後 $\Omega_r = \Omega_a$ が成立する。このとき、 $\hat{\gamma}_{s+1} = 0$ であり、以後 s は 1 つ増加し、 $\hat{\gamma}_s$ の微分係数も未知数となる。

TPC 4 1 つの区間の区間長があらかじめ定められた上限値 $\Delta\Omega_a$ に一致する。

2.6 節では、条件 **C1** 及び **C2** が成立するとき、目的関数はパラメーター θ の単調増加関数であり、1 つの自明な最適設計解を初期解として、最適設計解順序集合を生成することができることを示した。いま、簡単のため 1 次固有値は重複しないものとする。Problem OP1 と Problem ODF1 を比較すると、Problem ODF1 に対して、**C1** 及び **C2** は次の **C1*** 及び **C2*** のように書ける。

C1* $W(\mathbf{A})$ は \mathbf{A} の狭義の単調増加関数である。

C2* $-\Omega_1(\mathbf{A}) + \Omega_a$ は Ω_a の狭義の単調増加関数である。

(3.7) より、**C1*** は成立することがわかる。また、**C2*** は明らかに成立する。ゆえに、(2.26) より明らかに

$$\hat{W}' = \hat{\gamma}_1 \tag{3.20}$$

が成立し、 $\hat{W}(\Omega_a)$ は Ω_a の狭義の単調増加関数である。さらに、2.6 節では、**C1**、**C2** 及び **C4** ~ **C6** が成立するとき目的関数はパラメーター θ の単調増加凸関数であることを示した。Problem ODF1 に対しては、**C4** 及び **C5** は明らかに成立するが、**C6** について検討することは困難である。そこで、以下では、 W が Ω_a の単調増加凸関数であるための、**C6** とは異なる条件を示し、その条件について検討する。ここで、簡単のため $i = 1, 2, \dots, m^I$ に対して $\hat{A}_i > \bar{A}_i$ が成立し、 $i = m^I + 1, m^I + 2, \dots, m$ に対して $\hat{A}_i = \bar{A}_i$ が成立するものとする。また、 \hat{P}_{MD}^A 、 \hat{P}_{MD}^I 、 \hat{P}_{MJ} 、 \hat{P}_K^A 及び \hat{P}_K^I を、次のように定義する。

$$\begin{aligned}\hat{P}_{MD}^A &= \sum_{i=m^I+1}^m \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1 \right) \\ \hat{P}_{MD}^I &= \sum_{i=1}^{m^I} \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1 \right) \\ \hat{P}_{MJ} &= \hat{\Phi}_1^T M_J \hat{\Phi}_1 \\ \hat{P}_K^A &= \sum_{i=m^I+1}^m \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1 \right) \\ \hat{P}_K^I &= \sum_{i=1}^{m^I} \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1 \right)\end{aligned}\tag{3.21a ~ e}$$

このとき、(3.10a) の両辺に \hat{A}_i を乗じ、(3.11) を用いて inactive な部材に対する和をとると

$$\hat{\gamma}_1 \left(\hat{P}_K^I - \Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right) = \sum_{i=1}^{m^I} \left(\rho L_i \hat{A}_i \right)\tag{3.22}$$

を得る。(3.22) の両辺を Ω_a で微分し、(3.20) 及び $\hat{A}_i' = 0$ ($i = m^I + 1, m^I + 2, \dots, m$) を用いると次式を得る。

$$\hat{\gamma}_1' \left(\hat{P}_K^I - \Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right) + \hat{\gamma}_1 \left\{ \hat{P}_K^{I'} - \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right)' \right\} = \hat{\gamma}_1\tag{3.23}$$

(3.3) より

$$\left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^A \right)' + \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right)' + \left(\Omega_a \hat{P}_{MJ} \right)' = \hat{P}_K^{A'} + \hat{P}_K^{I'}\tag{3.24}$$

が成立するから、(3.23) は

$$\hat{\gamma}_1' \left(\hat{P}_K^I - \Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right) = \hat{\gamma}_1 \left\{ 1 + \hat{P}_K^{A'} - \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^A \right)' - \left(\Omega_a \hat{P}_{MJ} \right)' \right\}\tag{3.25}$$

のようになる。また、(3.2) の両辺に Ω_a を乗じ、 Ω_a に関して微分すると、

$$\left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^A \right)' + \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right)' + \left(\Omega_a \hat{P}_{MJ} \right)' = 1\tag{3.26}$$

が成立するから、(3.25) 及び (3.26) より次式を得る。

$$\hat{\gamma}_1' \left(\hat{P}_K^I - \Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right) = \hat{\gamma}_1 \left\{ \hat{P}_K^{A'} + \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right)' \right\}\tag{3.27}$$

(3.20) より

$$\hat{W}'' = \hat{\gamma}'_1 \quad (3.28)$$

であり, (3.22) より

$$\hat{P}_K^I - \Omega_a \hat{P}_{MD}^I > 0 \quad (3.29)$$

であるから, (3.27) より $\hat{W}'' > 0$ であるための条件は

$$\hat{P}_K^{A'} + \left(\Omega_a \hat{P}_{MD}^I \right)' > 0 \quad (3.30)$$

である。(3.30) を, (3.21a ~ d) を用いて再び A_i 及び Φ_1 による次のような表現に書きかえる。

$$\sum_{i=m^I+1}^m \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1 \right)' + \left\{ \Omega_a \sum_{i=1}^{m^I} \left(\hat{A}_i \hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1 \right) \right\}' > 0 \quad (3.31)$$

(3.31) の左辺第 1 項において, \hat{A}_i ($i = m^I + 1, m^I + 2, \dots, m$) は Ω_a にかかわらず一定値 \bar{A}_i に一致する。さらに, $\hat{\Phi}_1$ は Ω_a の変化にともないあまり変化しないことが経験的に知られている。また, 第 2 項において, Ω_a の増加にともない \hat{A}_i ($i = 1, 2, \dots, m^I$) は多くの場合単調に増加する。したがって, (3.31) は, ほとんどの場合において成立する。また, 後に示す例題において \hat{W} は Ω_a の単調増加凸関数であることを例証する。ゆえに, Ω_a を $\bar{\Omega}$ から増加させることにより W は単調に増加し, $W \rightarrow \infty$ となるものと予想される。また, この特性を用いると, 1 次固有値の 2 つの指定値 $\Omega^{(1)}$ 及び $\Omega^{(2)}$ ($\Omega^{(1)} < \Omega^{(2)}$) に対応する最適設計解が得られているとき, $\Omega^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega^{(2)}$ の範囲の指定 1 次固有値に対応する最適設計解における, 全部材質量の上限值及び下限値を, 以下のようにして求めることができる。

関数 $\hat{W}(\Omega_a)$ の $\Omega_a = \Omega^{(1)}$ 及び $\Omega^{(2)}$ での接線 $\hat{W}_1(\Omega_a)$ 及び $\hat{W}_2(\Omega_a)$ は, $\hat{W}' = \hat{\gamma}_1$ を用いると, それぞれ

$$\begin{aligned} \hat{W}_1(\Omega_a) &= \hat{W}(\Omega^{(1)}) + \hat{\gamma}_1(\Omega^{(1)}) \left(\Omega_a - \Omega^{(1)} \right) \\ \hat{W}_2(\Omega_a) &= \hat{W}(\Omega^{(2)}) + \hat{\gamma}_1(\Omega^{(2)}) \left(\Omega_a - \Omega^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.32a, b)$$

のように書ける。また, 2 点 $(\Omega^{(1)}, \hat{W}(\Omega^{(1)}))$ 及び $(\Omega^{(2)}, \hat{W}(\Omega^{(2)}))$ を結ぶ線分 $\hat{W}_u(\Omega_a)$ は,

$$\hat{W}_u(\Omega_a) = \hat{W}(\Omega^{(1)}) + \frac{\hat{W}(\Omega^{(2)}) - \hat{W}(\Omega^{(1)})}{\Omega^{(2)} - \Omega^{(1)}} \left(\Omega_a - \Omega^{(1)} \right) \quad (3.33)$$

で定義される。ここで, \hat{W} が Ω_a の単調増加凸関数であるとき, 区間 $\Omega^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega^{(2)}$ において, 明らかに \hat{W}_u は \hat{W} の上限値であり, 下限値 \hat{W}_l は次式で与えられる。

$$\hat{W}_l = \max\{\hat{W}_1, \hat{W}_2\} \quad (3.34)$$

3.4 最小断面積制限値の存在しない場合

3.3 節では、全部材の断面積がその最小制限値で定まるような設計解を、自明な初期最適設計解として、 Ω_a に関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を求める手法を示した。その手法では、第 1 段階において、 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ の初期設計解に対して固有値解析を行なった。ところで、最小断面積制限値が存在しない場合、すなわち $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ の場合には、その初期設計解に対して固有値解析を行なうことはできない。

いま、非構造質量が存在する場合を考える。このとき、設計 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ は不安定なトラスであるから、その 1 次固有値は明らかに 0 である。また、非常に小さい指定 1 次固有値が与えられたとき、その最適設計解において、部材断面積は微小な値であるが、1 次固有モードは正規化条件 (3.2) より、有限量となることがわかる。したがって、 $\Omega_a \rightarrow 0$ の極限を考えたとき、 $\hat{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{0}$ が成立するが、 $\hat{\Phi}_1$ は有限量に収束する。いま、 $\Omega_a = 0$ に対応する最適設計解を初期最適設計解として、 Ω_a に関するテイラー展開により、最適設計解順序集合を生成することを考える。簡単のため、 Ω_a を 0 から増加させたとき、その最適設計解において 1 次固有値は重複しないものとする。(3.1) に対して $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 及び $\Omega_1 = 0$ を用いると、自明な式となる。(3.11) において、 $\Omega_a = 0$ とすると、

$$\zeta_i^1 = \hat{\Phi}_1^T \mathbf{K}_i^* \hat{\Phi}_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.35)$$

を得る。また、(3.2) は

$$\hat{\Phi}_1^T \mathbf{M}_J \hat{\Phi}_1 = 1 \quad (3.36)$$

のようになる。いま、 $\hat{\Phi}_1$ が Ω_a の連続関数とすると、微小な Ω_a の値に対する最適設計解において断面積が正の値をとる部材では、 $\Omega_a \rightarrow 0$ の極限に対しても (3.10a) が満たされなければならない。したがって、(3.10a, b) 及び (3.35) より、 $\Omega_a = 0$ に対して次の各式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{A}'_i > 0 \quad \text{のとき} \quad \gamma_1 \hat{\Phi}_1^T \mathbf{K}_i^* \hat{\Phi}_1 &= \rho L_i \\ \hat{A}'_i = 0 \quad \text{のとき} \quad \gamma_1 \hat{\Phi}_1^T \mathbf{K}_i^* \hat{\Phi}_1 &\leq \rho L_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.37a, b)$$

(3.14), (3.15) 及び (3.16) に対して、 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, $\hat{\Omega}_1 = \Omega_a = 0$ 及び $\hat{\Omega}'_1 = 1$ を用いると、次の各式を得る。

1 階微分

$$\left\{ \sum_{i=1}^m A'_i \mathbf{K}_i^* \right\} \hat{\Phi}_1 = \mathbf{M}_J \hat{\Phi}_1 \quad (3.38)$$

$$2\hat{\Phi}_1^T \mathbf{M}_J \hat{\Phi}'_1 + \hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m A'_i \mathbf{M}_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 = 0 \quad (3.39)$$

$$\hat{\zeta}_i^{1'} = 2\hat{\Phi}_1^T \mathbf{K}_i^* \hat{\Phi}'_1 - \hat{\Phi}_1^T \mathbf{M}_{Di}^* \hat{\Phi}_1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.40)$$

静定トラスでは、 Ω_a を 0 から増加させると、明らかに全ての部材の断面積が増加しなければならない。したがって、全部材に対して (3.37a) が満たされる。ところで、 $\hat{\Phi}_1^T \mathbf{K}_i^* \hat{\Phi}_1 / L_i$ は $\hat{\Phi}_1$ に対応する第 i 部材の単位体積あたりひずみエネルギーの 2 倍であるから、(3.37a, b) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \hat{A}'_i > 0 \quad &\text{のとき} \quad 2\gamma_1 E \hat{\varepsilon}_i^2 = \rho \\ \hat{A}'_i = 0 \quad &\text{のとき} \quad 2\gamma_1 E \hat{\varepsilon}_i^2 \leq \rho \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.41a, b)$$

ここで、 $\hat{\varepsilon}_i$ は $\hat{\Phi}_1$ に対応する第 i 部材のひずみであり、 E は弾性係数である。静定トラスに対しては、ひずみ-変位関係を定める行列は正則な正方行列であるから、 $\hat{\varepsilon}_i$ の符号を仮定することにより、(3.36) 及び (3.41a) を用いて $\hat{\Phi}_1$ を決定することができる。 $\hat{\Phi}_1$ が得られると、(3.38) より、 m 元連立 1 次方程式を解くことにより \hat{A}' を求めることができる。その結果、ある部材に対して $\hat{A}'_i < 0$ となった場合には、その部材に対して仮定した $\hat{\varepsilon}_i$ の符号を入れかえて再び \hat{A}' を計算する。 $\hat{\varepsilon}_i$ の符号として、例えば全部材の断面積が一定である場合の Φ_1 に対応する ε_i の符号を与えれば、多くの場合、繰り返し計算を行わずに全部材に対して正の値をとる \hat{A}' を求めることができる。

不静定トラスに対しても、 Ω_a を 0 から増加させたときに、その最適設計解において断面積が 0 にとどまる不要部材がわかっているときには、静定トラスと全く同様にして $\Omega_a = 0$ に対応する $\hat{\Phi}_1$ 及び \hat{A}' を求めることができる。ところで (3.37a, b) は、最適性条件において、(3.11) の右辺第 2 項すなわち部材質量による単位体積あたりひずみエネルギーの項を無視した式に相当する。また、(3.38) は (3.1) において部材質量を無視し、設計変数として \hat{A}' を考慮し、かつ固有値が $1 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であるような式である。したがって、不静定トラスにおいて不要部材がわからないときにも、指定 1 次固有値として $1 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ を与え、運動方程式において部材質量の項を無視し、(3.37a, b) の形の最適性条件を用いた optimality criteria method[1] 等により、 $\Omega_a = 0$ に対応する $\hat{\Phi}_1$ を求めることができる。さらに、得られた設計変数を \hat{A}' におきかえることにより \hat{A}' が得られる。 $\hat{\Phi}_1$ 及び \hat{A}' が得られると、(3.39) 及び (3.40) を用いて $\hat{\Phi}'_1$ を求めることができる。

(3.14), (3.15) 及び (3.16) を順次 Ω_a で微分し、 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, $\hat{\Omega}_1 = \Omega_a = 0$, $\hat{\Omega}'_1 = 1$ 及び $\Omega''_1 = \Omega'''_1 = \Omega''''_1 = 0$ を用いると、次の各式を得る。

2 階微分

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}''_i \mathbf{K}_i^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 2 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}'_i \mathbf{K}_i^* \right\} \hat{\Phi}'_1 = 2 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}'_i \mathbf{M}_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 2 \mathbf{M}_J \hat{\Phi}'_1 \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}''_i \mathbf{M}_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 4 \hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}'_i \mathbf{M}_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}'_1 \\ + 2 \hat{\Phi}_1^T \mathbf{M}_J \hat{\Phi}''_1 + 2 \hat{\Phi}_1'^T \mathbf{M}_J \hat{\Phi}'_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\hat{\zeta}_i^{1''} = 2\hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1'' + 2\hat{\Phi}_1'^T K_i^* \hat{\Phi}_1' - 4\hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1' \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.44)$$

3 階微分

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i''' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 3 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 3 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1'' \\ & = 3 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 6 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 3M_J \hat{\Phi}_1'' \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i''' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 6\hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 6\hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1'' \\ & + 6\hat{\Phi}_1'^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 2\hat{\Phi}_1^T \{ \hat{M}_D + M_J \} \hat{\Phi}_1''' \\ & + 6\hat{\Phi}_1'^T \{ \hat{M}_D + M_J \} \hat{\Phi}_1'' = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_i^{1'''} & = 2\hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1''' + 6\hat{\Phi}_1'^T K_i^* \hat{\Phi}_1'' - 6\hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1''' \\ & - 6\hat{\Phi}_1'^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1' \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.47)$$

4 階微分

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'''' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 4 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i''' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 6 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1'' \\ & + 4 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' K_i^* \right\} \hat{\Phi}_1''' = 4 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i''' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 \\ & + 12 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 12 \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1'' + 4M_J \hat{\Phi}_1''' \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'''' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1 + 8\hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i''' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 12\hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1'' \\ & + 12\hat{\Phi}_1'^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i'' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1' + 8\hat{\Phi}_1^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1''' \\ & + 24\hat{\Phi}_1'^T \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}_i' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_1'' + 2\hat{\Phi}_1^T M_J \hat{\Phi}_1'''' + 8\hat{\Phi}_1'^T M_J \hat{\Phi}_1''' + 6\hat{\Phi}_1''^T M_J \hat{\Phi}_1'' = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_i^{1''''} & = 2\hat{\Phi}_1^T K_i^* \hat{\Phi}_1'''' + 8\hat{\Phi}_1'^T K_i^* \hat{\Phi}_1''' + 6\hat{\Phi}_1''^T K_i^* \hat{\Phi}_1'' \\ & - 8\hat{\Phi}_1^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1'''' - 24\hat{\Phi}_1'^T M_{Di}^* \hat{\Phi}_1''' \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (3.50)$$

これらの式を用い、 \hat{A} 及び $\hat{\Phi}_1$ の $\Omega_a = 0$ における Ω_a に関する微分係数を求めることができる。以上のように、 $\bar{A} = \mathbf{0}$ のときには、 $\bar{A} > \mathbf{0}$ の場合と比較して非常に簡単に高階の微分係数まで求めることができる。ゆえに、 $\Omega_a = 0$ での微分係数を用いてかなり大きい指定1次固有値までの最適設計解順序集合のテイラー展開表現を得ることが可能である。さらに、静定トラスでは、全ての部材において断面積は正の値をとらなければならないから、TPC1あるいはTPC2は満たされることはなく、1次固有値が重複する場合をのぞいて、3.3節のような区分的テイラー展開を行なう必要はない。

3.5 トラスの幾何学的形状パラメータ最適化手法

部材の位相学的接続条件 (トポロジー) 及び支持条件の定められたトラスに対し, 指定 1 次固有振動数を有し, かつ目的関数を最小にするような, 最適な節点位置を見いだす問題に対しては, いくつかの論文が発表されている [59,60]。それらの論文では, 節点位置を設計変数と考えた感度解析によって, 最適節点位置を数値的に見いだす手法が示されている。しかし, その感度解析には, 部材断面積を設計変数と考えた設計感度解析と比べて多くの計算時間を必要とするため, それらの手法を大規模トラスに適用することは困難であると思われる。

いま, 節点位置が 1 つの幾何学的形状パラメータ R で完全に決定されるようなトラスを考える。このとき, R の上限値を R_u , 下限値を R_l とし, 最適幾何学的形状パラメータ及びそれに対応する最適部材断面積集合を求める問題を, 次のように定式化する。

[Problem ODF2]

1 次固有値制約条件

$$\Omega_r^G(\mathbf{A}, R) \geq \Omega_a \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.52)$$

最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.53)$$

及び, R に対する最大値, 最小値制約条件

$$R_l \leq R \leq R_u \quad (3.54)$$

の下で, 全部材質量

$$W^G(\mathbf{A}, R) = \rho \sum_{i=1}^m \{A_i L_i^G(R)\} \quad (3.55)$$

を最小にするような最適幾何学的形状パラメータ

及びそれに対応する部材断面積集合を求めよ。

ここで, 上添字 G は, その関数が R の関数あるいは \mathbf{A} 及び R の関数であることを示す。

この問題に対する \mathbf{A} に関する最適性条件は, (3.10a, b) 及び (3.11) と同じである。さらに, ラグランジュ乗数法を用いることにより, 次のような R に関する最適性必要条件を得る。

$$\begin{aligned} R_l < R < R_u \quad \text{のとき} \quad & \sum_{r=1}^s (\gamma_r^G \zeta^{Gr}) = \rho \sum_{i=1}^m \left\{ A_i \frac{\partial L_i^G}{\partial R} \right\} \\ R = R_u \quad \text{のとき} \quad & \sum_{r=1}^s (\gamma_r^G \zeta^{Gr}) \geq \rho \sum_{i=1}^m \left\{ A_i \frac{\partial L_i^G}{\partial R} \right\} \\ R = R_l \quad \text{のとき} \quad & \sum_{r=1}^s (\gamma_r^G \zeta^{Gr}) \leq \rho \sum_{i=1}^m \left\{ A_i \frac{\partial L_i^G}{\partial R} \right\} \end{aligned} \quad (3.56a \sim c)$$

ここで、 γ_r^G は非負のラグランジュ乗数であり、 ζ^{Gr} は次式で定義される。

$$\begin{aligned}\zeta^{Gr} &= \frac{\partial \Omega_r^G}{\partial R} \\ &= \Phi_r^{GT} \left\{ \frac{\partial \mathbf{K}^G}{\partial R} - \Omega_a \frac{\partial \mathbf{M}_D^G}{\partial R} \right\} \Phi_r^G \quad (r = 1, 2, \dots, s)\end{aligned}\quad (3.57)$$

ここで、(3.2) を用いた。また、 \mathbf{M}_J は R に依存しないものとする。(3.10a, b) 及び (3.11) と (3.56a ~ c) 及び (3.57) をそれぞれ比較すると、(3.57) では $\frac{\partial \mathbf{K}^G}{\partial R}$ 及び $\frac{\partial \mathbf{M}_D^G}{\partial R}$ が \mathbf{A} と R の関数であり、 $\frac{\partial L_i^G}{\partial R}$ も R の関数であるから、 R に関する最適性条件は、 \mathbf{A} に関する最適性条件と比べて、非常に複雑な形となっていることがわかる。感度解析に基づき最適幾何学的形状を求める場合も同様であり、 R に関する感度 ζ^{Gr} を計算するために、非常に多くの計算量を必要とすることになる。

ところで、3.3 節の区分的テイラー展開手法を用いると、種々の幾何学的形状パラメーターの値に対応して節点位置の固定されたトラスに対し、最適設計解順序集合を容易に生成することができ、 Ω_a をパラメーターとした全部材質量 W についてのテイラー展開式を得ることができる。したがって、1つの指定1次固有値 Ω_a^* に対して、種々の幾何学的形状パラメーターに対応する最適設計解における W の値を容易に求めることができ、最適幾何学的形状パラメーターを求めることができる。また、最適幾何学的形状パラメーターのみを求めるのではなく、種々の指定1次固有値に対する最適幾何学的形状パラメーターを得ること及び、幾何学的形状パラメーターを変化させたときの目的関数の値の変化に関する情報を得ることは有意義であるから、一見して遠回りに思われる本手法は、実用的な手法であるといえる。

3.6 最適設計解順序集合の概念に基づく2段階最適設計法

3.3 節では、指定1次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対して、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値をパラメーターとして、最適設計解順序集合を生成する手法を示した。本手法を用いると、最適設計解に関する種々の設計図表が容易に得られ、設計者はそれらの設計図表をもとに、「最も望ましい」最適設計解を選択することができる。しかし、設計者にとっては、「最も望ましい」最適設計解を選択するための何らかの指標が存在することが必要である場合もある。

本節では、fractional programming[55,56]の定式化に基づき、第1段階としての Problem ODF1 に対する最適設計解順序集合から、1つの最適設計解を選択するための理論を展開する。指定1次固有振動数(1次固有値)を有するトラスの最適設計問題は、必要とする output としての1次固有値を実現するための、input としての全部材質量を最小化する問題であると考えられる。したがって、種々の指定1次固有値に対応する最適設計解の中から、最も望ましい最適設計解を選択するための指標としては、次の2つが考えられる。

指標 1 Input の output に対する比で定義される input-output ratio, すなわち全部材質量 $\hat{W}(\Omega_a)$ の指定 1 次固有値に対する比 $\hat{W}(\Omega_a)/\Omega_a$ が最小となる。

指標 2 Output と, input にある係数 α を乗じた量との差で定義される net output, すなわち指定 1 次固有値と全部材質量の α ($\alpha > 0$) 倍との差 $\Omega_a - \alpha\hat{W}(\Omega_a)$ が最大となる。

ここで, α は Ω_a と W の単位が異なるため必要な量である。また, Ω_a を増加させる要求と W を減少させる要求の重要度を定める量と考えることもできる。そこで, 次のような 2 つの第 2 段階最適設計問題を定式化する。

[Problem FOP1]

Ω_a をパラメータとした最適設計解順序集合 $\hat{A}(\Omega_a)$ において,

Ω_a の領域 $\Omega^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega^{(2)}$ が与えられたとき,

$$\hat{C}(\Omega_a) = \frac{\hat{W}(\Omega_a)}{\Omega_a} \quad (3.59)$$

を最小にするような指定 1 次固有値 Ω_a^F

及び, 最適設計解 A^F を求めよ。

[Problem DOP1]

Ω_a をパラメータとした最適設計解順序集合 $\hat{A}(\Omega_a)$ において,

Ω_a の領域 $\Omega^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega^{(2)}$ が与えられたとき,

$$\hat{Z}(\Omega_a) = \Omega_a - \alpha\hat{W}(\Omega_a) \quad (\alpha > 0) \quad (3.60)$$

を最大にするような指定 1 次固有値 Ω_a^D

及び, 最適設計解 A^D を求めよ。

Problem FOP1 に対しては, 図 3.1(a ~ c) に示したような 3 つの場合それぞれについて, Ω_a^F 及び A^F は唯一に定められる。ここで, 最適 input-output ratio C^F は, $C^F = \hat{W}(\Omega_a^F)/\Omega_a^F$ で与えられる。これらの図では, $\hat{W}(\Omega_a)$ は Ω_a の単調増加凸関数であるが, $\hat{W}(\Omega_a)$ は必ずしも Ω_a の単調増加凸関数である必要はない。Problem DOP1 に対しても同様であり, Ω_a^D 及び A^D は, 図 3.2(a ~ c) のような 3 つの場合それぞれに対応して唯一に定められる。ここで, 最適 net output Z^D は, $Z^D = \Omega_a^D - \alpha\hat{W}(\Omega_a^D)$ で与えられる。以上より, 最適設計解順序集合から, 「最も望ましい」最適設計解を得ることができる。ところで, この理論に基づき得られた 2 段階最適設計解が, Problem ODF1 に対するいかなる解となっているかについて以下に考察する。

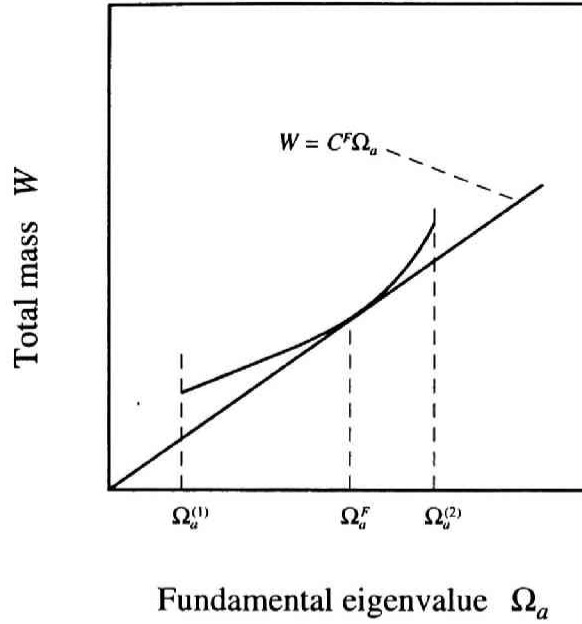


図 3.1(a) 最適解順序集合において input-output ratio を最小化する
指定 1 次固有値 Ω_a^F ($\Omega_a^{(1)} < \Omega_a^F < \Omega_a^{(2)}$ の場合)

指定 1 次固有値が定められたとき, Problem ODF1 に対する最適設計解を $\tilde{\mathbf{A}}$ とすると, $\tilde{\mathbf{A}}$ は全ての制約条件を満たす設計解 (許容設計解) の中で, 目的関数 $W(\mathbf{A})$ を最小にする設計解であるから, Problem ODF1 の制約条件を満たす 1 つの許容設計解を \mathbf{A}^P とすると,

$$W(\mathbf{A}^P) \geq W(\tilde{\mathbf{A}}) \quad (3.61)$$

が成立する。したがって, $W(\mathbf{A}^P)$ は, Ω_a の区間 $\Omega_a^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega_a^{(2)}$ が定められたとき, 図 3.3 に示すような, 曲線 $\hat{W}(\Omega_a) = W(\hat{\mathbf{A}}(\Omega_a))$ のエピグラフ [58] χ に含まれることになる。ゆえに, Problem ODF1 の制約条件を満たす設計解を許容設計解の集合と考えた Problem FOP1 の最適設計解 $\{\Omega_a^F, \mathbf{A}^F\}$ に対応する $(\Omega_a^F, W(\mathbf{A}^F))$ は, 曲線 $W = \hat{W}(\Omega_a)$ 上に存在する。したがって, 曲線 $W = \hat{W}(\Omega_a)$ 上の設計解を許容設計解の集合と考えた Problem FOP1 の最適設計解は, Problem ODF1 の制約条件を満たす設計解を許容設計解の集合と考えた場合の最適設計解でもある。ゆえに, 第 1 段階として Problem ODF1 を解き, さらに第 2 段階として Problem FOP1 を解くことは, 次の Problem FOP2 を解くことと等価である。同様に, 第 2 段階において Problem DOP1 を解くことは, 次の Problem DOP2 を解くことと等価である。

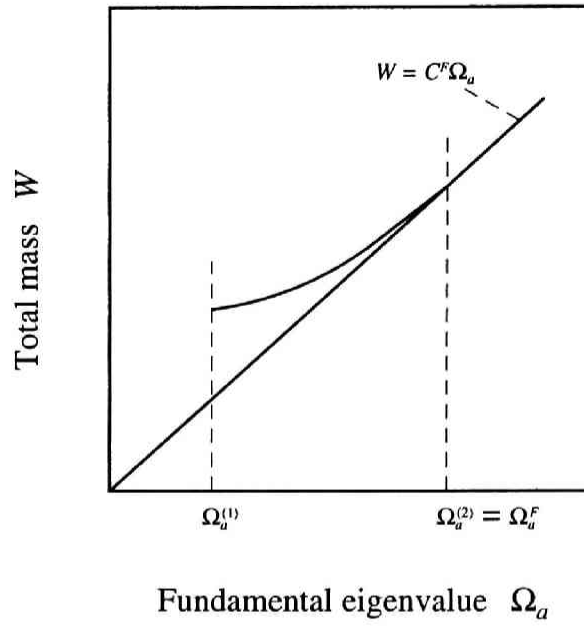


図 3.1(b) 最適解順序集合において input-output ratio を最小化する
指定 1 次固有値 Ω_a^F ($\Omega_a^F = \Omega_a^{(2)}$ の場合)

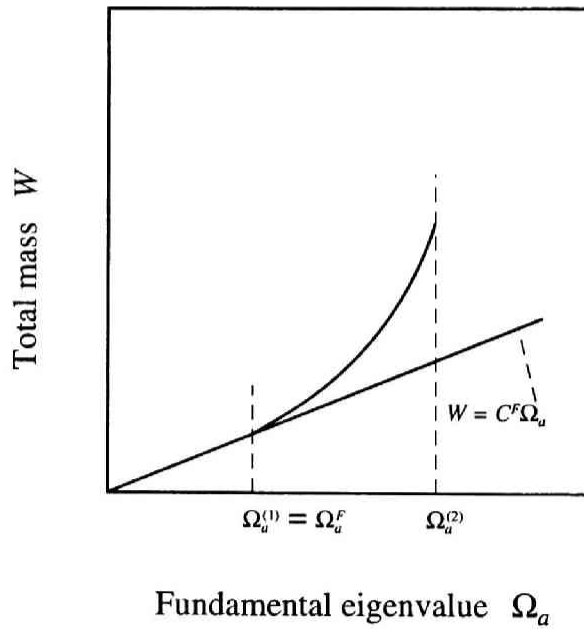


図 3.1(c) 最適解順序集合において input-output ratio を最小化する
指定 1 次固有値 Ω_a^F ($\Omega_a^F = \Omega_a^{(1)}$ の場合)

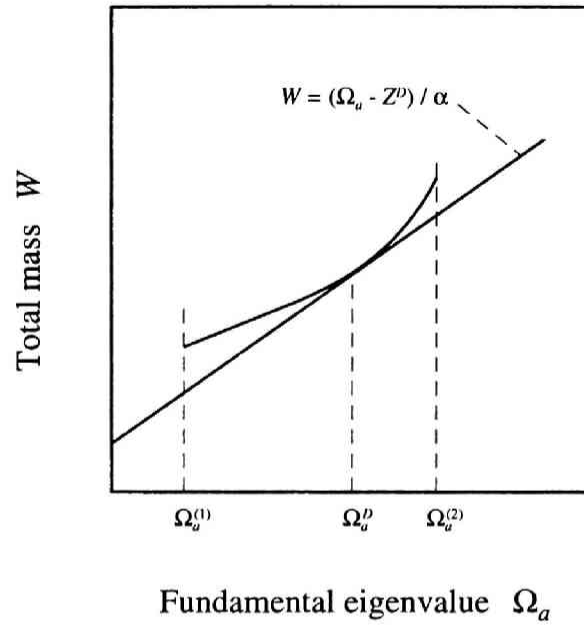


図 3.2(a) 最適解順序集合において net output を最大化する指定
1 次固有値 Ω_a^D ($\Omega_a^{(1)} < \Omega_a^D < \Omega_a^{(2)}$ の場合)

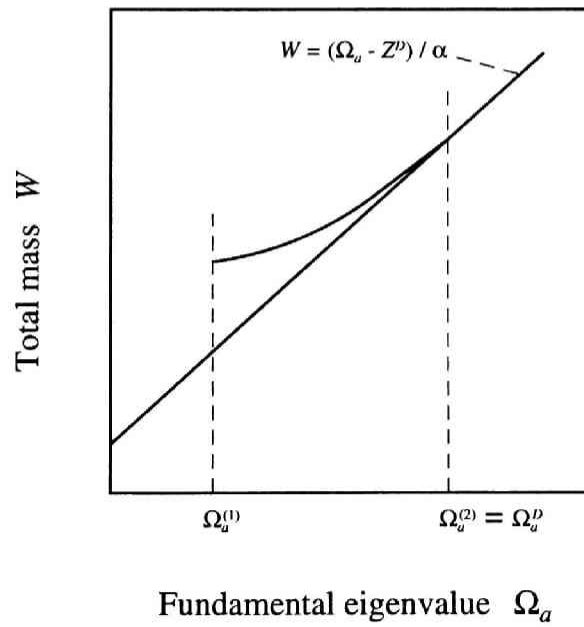


図 3.2(b) 最適解順序集合において net output を最大化する指定
1 次固有値 Ω_a^D ($\Omega_a^D = \Omega_a^{(2)}$ の場合)

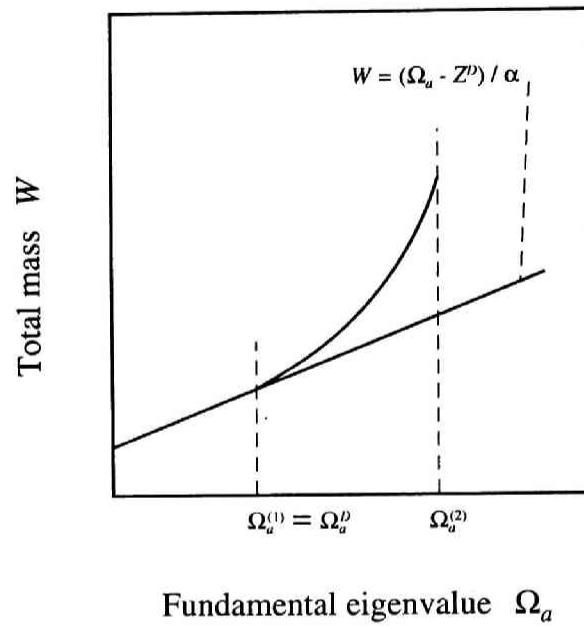


図 3.2(c) 最適解順序集合において net output を最大化する指定
1 次固有値 Ω_a^D ($\Omega_a^D = \Omega_a^{(1)}$ の場合)

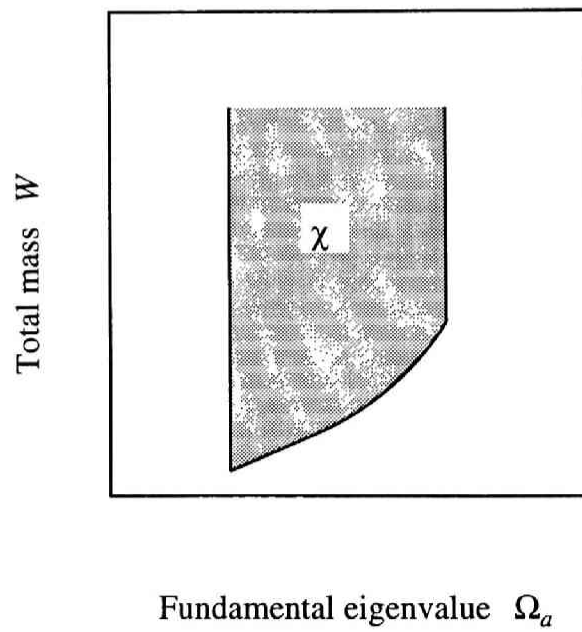


図 3.3 最適設計解順序集合のエピグラフ χ

[Problem FOP2]

1 次固有値制約条件

$$\Omega_r \geq \Omega_a \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.63)$$

及び, 最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.64)$$

の下で,

$$C(\mathbf{A}) = \frac{\dot{W}(\mathbf{A})}{\Omega_a} \quad (3.65)$$

を最小にするような Ω_a と \mathbf{A} の組 $\{\Omega_a^F, \mathbf{A}^F\}$ を求めよ。

[Problem DOP2]

1 次固有値制約条件

$$\Omega_r \geq \Omega_a \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (3.67)$$

及び, 最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3.68)$$

の下で,

$$Z(\mathbf{A}) = \Omega_a - \alpha W(\mathbf{A}) \quad (\alpha > 0) \quad (3.69)$$

を最大にするような Ω_a と \mathbf{A} の組 $\{\Omega_a^D, \mathbf{A}^D\}$ を求めよ。

以上より, 第 1 段階として Problem ODF1 に対する最適設計解順序集合を求め, その最適設計解順序集合を許容設計解とし, 第 2 段階としての Problem FOP1 あるいは DOP1 を解く 2 段階最適設計法は, Problem FOP2 あるいは DOP2 を一度解くこととそれぞれ等価であることが示された。大規模トラスに対して, 既往の最適化手法を用いて Problem FOP2 あるいは DOP2 を直接解くことは困難であるため, 本手法の実用上の価値は大きい。ところで, Problem DOP1 及び DOP2 で, 係数 α は $W(\mathbf{A})$ と Ω_a の次元が異なるために導入した量である。しかし, α の値を決定するための尺度は何も存在しない。ゆえに, Problem FOP1 と Problem DOP1 を比較すると, Problem FOP1 の方がより現実的であると考えられる。

3.7 例題

3.3 節で提示した区分的テイラー展開手法の有効性を示すため、まず 10 部材平面トラスを用いて検証を行ない、480 部材平板状立体トラスの例題で、その実用性を明らかにする。次に、最適設計解の Ω_a に関する微分可能性について、簡単なトラスを用いて考察する。さらに、最小断面積制限値が存在しない場合の 3.4 節の手法の有効性を、15 部材平面トラスを用いて明らかにする。また、3.5 節での、最適な幾何学的形状パラメーターを求める手法の適用例として、200 部材円筒状立体トラスの最適曲率半径を求め、 R に関する最適性必要条件に対する検討を行なう。最後に、3.6 節で述べた 2 段階最適設計法の適用例を示す。10 部材平面トラスの例題をのぞいて、部材質量行列にはコンシステント質量行列を用い、部材の材料は、 $\rho = 7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、弾性係数 $E = 205.8 \text{ GPa}$ の鋼材とする。

10 部材平面トラスの最適設計解順序集合

検証のための簡単な例題として、図 3.4 のような 10 部材平面トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、文献 [1] の結果と比較する。この例題では、部材の材料は $\rho = 2.7709 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、 $E = 68.96 \text{ GPa}$ のアルミニウムである。最小断面積制限値は全部材に対して 0.32255 cm^2 とする。

部材質量行列において、集中質量行列あるいはコンシステント質量行列の、いずれを用いたかについての記述が文献 [1] にはみられないが、固有値解析により、集中質量行列を用いていることがわかった。そこで、本例題でも集中質量行列を用いる。最大ステップサイズ $\Delta\Omega_a$ は $100.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ とする。指定 1 次固有値と全部材質量の関係を図 3.5 に示す。図 3.5 において実線は本手法による結果であり、丸印は文献 [1] の結果である。

$\Omega_a = 3947.8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対して、本手法で得られた最適部材断面積は、文献 [1] での値と 1% の精度で一致しており、本手法で得られた全部材質量は、文献 [1] のその 99% となっている。さらに、テイラー展開により得られた 1 次固有モードは、テイラー展開で得られた最適設計解に対して固有値解析を行なった結果得られた 1 次固有モードと、良好な精度で一致している。図 3.5 より、 \hat{W} は Ω_a の単調増加凸関数であることがわかる。

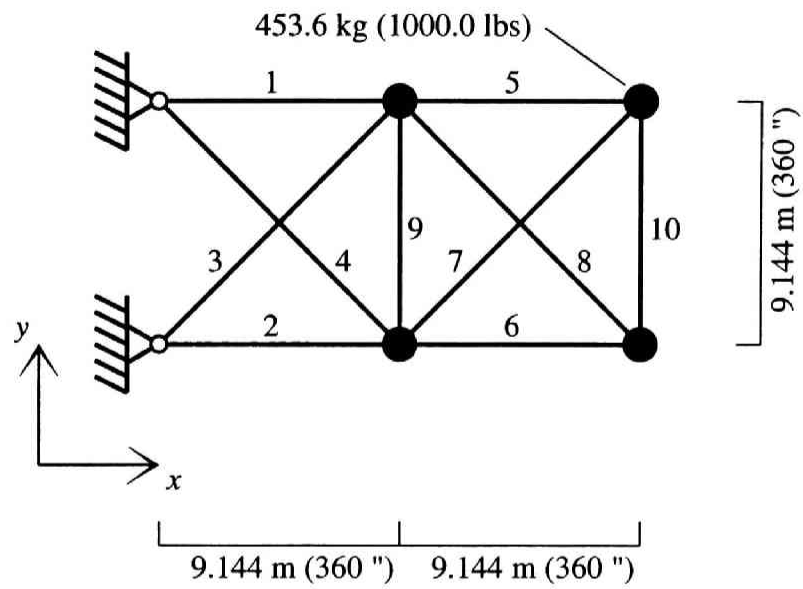


図 3.4 10 部材平面トラス

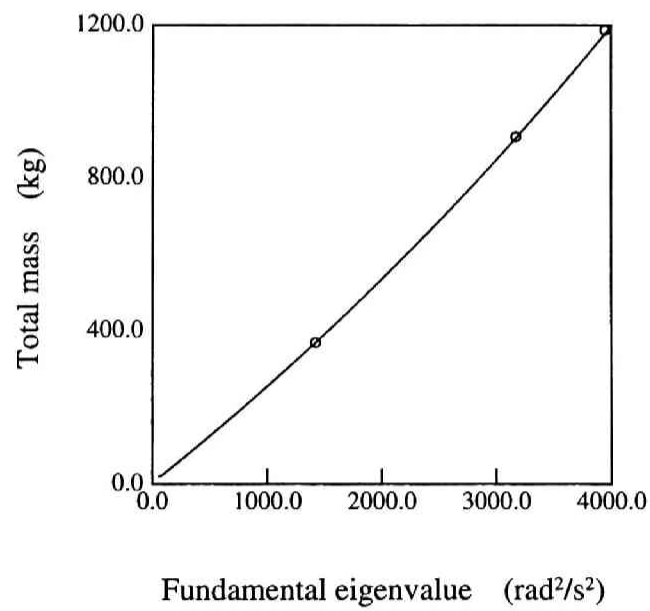


図 3.5 10 部材平面トラスの最適設計解順序集合における,
指定 1 次固有値と全部材質量の関係

480 部材平板状立体トラスの最適設計解順序集合

図 3.6 のような 480 部材平板状立体トラスに対して、最適設計解順序集合を生成した。トラスは 4 隅で z 方向に固定、 x 及び y 方向に弾性支持されている。支点到に接続する水平方向バネは、柱等の支持構造物を代表するものとする。したがって、その伸び剛性はあらかじめ与えられるものであり、ここでは 3.087×10^7 N/m とする。上層節点に 800.0 kg (4 辺では 400.0 kg, 4 隅では 200.0 kg) の集中質量を与える。斜材と xy 平面のなす角度は 45° である。また、全部材に対して一定の、 5.0 cm^2 の最小断面積制限値を与える。

固有値解析の結果、初期最適設計解 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ の 1 次固有値 $\bar{\Omega}$ は $236.40 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、高次の固有値は表 3.2 のとおりである。この初期解において、非構造集中質量の合計 4.8×10^4 kg に対して全部材質量は 3.7728×10^3 kg である。指定 1 次固有値を増加させると、1 次固有値と 2 次固有値が一致するものと予想されるため、 yz 平面に関して対称な、全体の 1/2 の部分に対してテイラー展開を行なう。ここで、 $\Delta\Omega_a$ は固有値が重複しない領域では $20.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、1 次固有値が重複する領域では $4.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。 Ω_a を $\bar{\Omega}$ から増加させると、 $\Omega_a = \Omega_B = 860.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ で 2 次固有値が 1 次固有値に一致した。 Ω_a と Ω_2 の関係を図 3.7 に示す。図 3.8 には Ω_a とラグランジュ乗数 γ_2 の関係を示す。この図より、 Ω_2 が Ω_1 に一致したときには $\gamma_2 = 0$ であり、 Ω_a の増加にともない γ_2 は単調に増加することがわかる。

図 3.9(a ~ d) には、それぞれ $\Omega_a = 519.08 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, $860.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$, $1008.2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $1234.9 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する最適設計解における部材断面積を示す。これらの図は、部材幅が断面積に比例するように描いたものである。ここで、構造物の対称性より、全体の 1/4 の部分について示した。図 3.9(a ~ d) より、動的剛性を表わすパラメータである Ω_a を増加させるのにともなう、最適部材断面積の増加の様子がわかる。また、 Ω_a を増加させると、長辺方向の支点間に剛な縁梁に相当するトラスが生成され、それらの部材が 1 次固有値を増加させる上で重要であることがわかる。図 3.10 には Ω_a と全部材質量 W の関係を示す。図 3.10 より、 W は Ω_a の単調増加凸関数であることがわかる。

表 3.3 には、 $\Omega_a = \Omega_B = 860.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する最適設計解に対して、固有値解析を行なった結果を示す。ここで、括弧内の値は 1 次固有値の指定値である。表 3.3 より、テイラー展開による誤差が十分に小さいこと及び、 yz 平面に関して逆対称な固有モードに対応する固有値が、 Ω_a 以上となっていることが確認できる。図 3.11(a,b) には、 $\Omega_a = 519.08 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する最適設計解の 1 次及び 2 次固有モードをそれぞれ示す。これらの図で、下側は xy 平面内変位、上側は下層平面の z 方向変位を示したものである。また、点線は変形前の材軸線である。図 3.11(a) の 1 次固有モードは xz 平面及び yz 平面に関して対称なモードであり、図 3.11(b) の 2 次固有モードは yz 平面に関して対称、 xz 平面に関して逆対称なモードである。

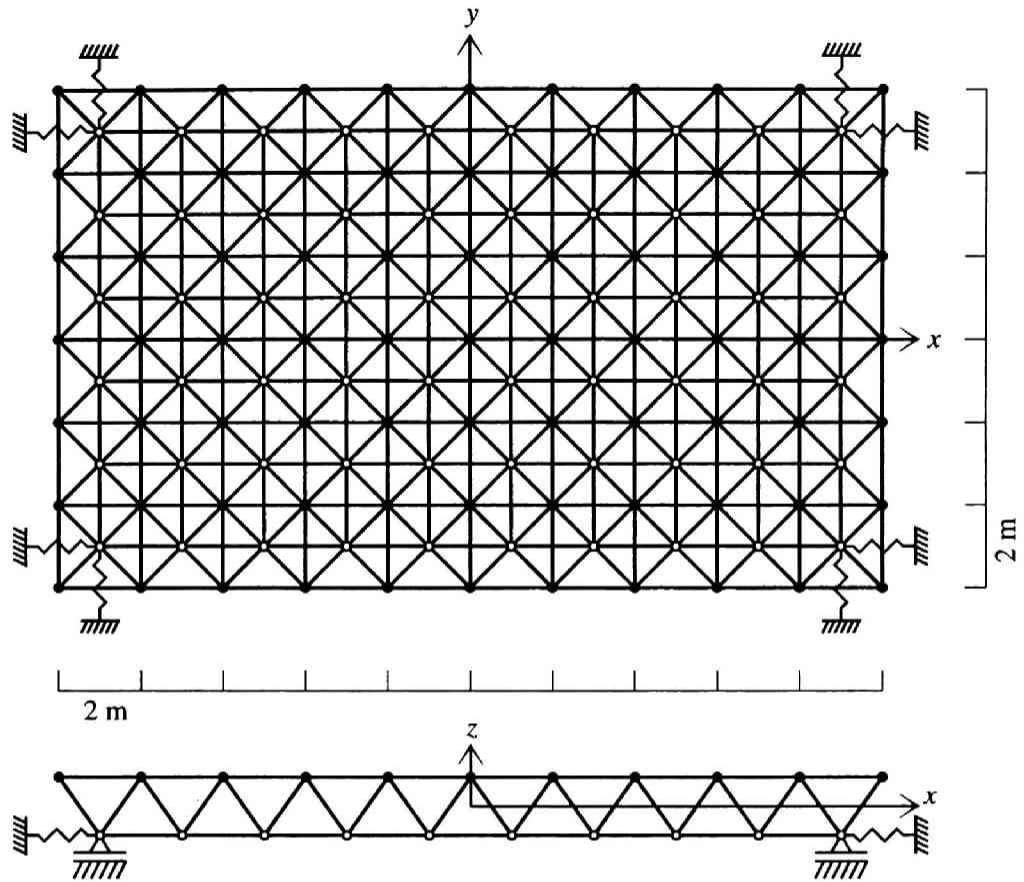


図 3.6 480 部材平板状立体トラス

表 3.2 480 平板状立体トラスの $\Omega_a = \bar{\Omega} = 236.40 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ における固有値 (rad^2/s^2)

	xz 平面に関して 対 称		xz 平面に関して 逆 対 称	
	1 次		2 次	3 次
yz 平面に関して 対称	236.40		300.18	857.87
yz 平面に関して 逆対称	4 次	5 次	6 次	
	1138.6	1645.6	1986.1	

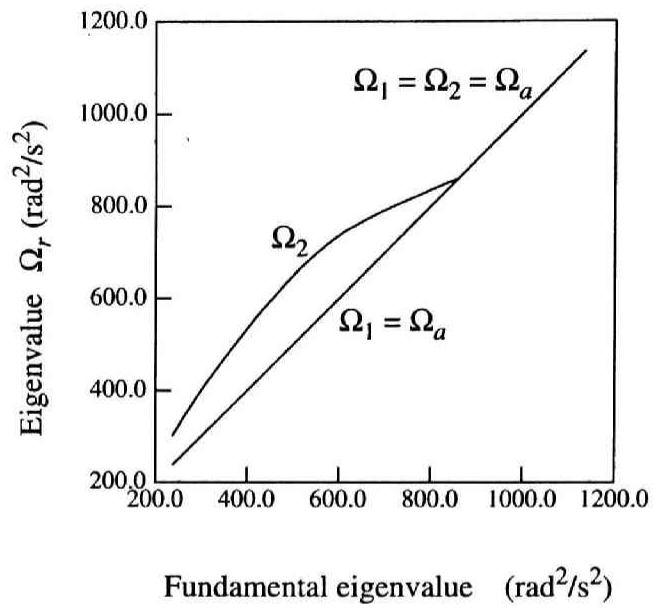


図 3.7 480 部材平板状立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定 1 次固有値と 2 次固有値の関係

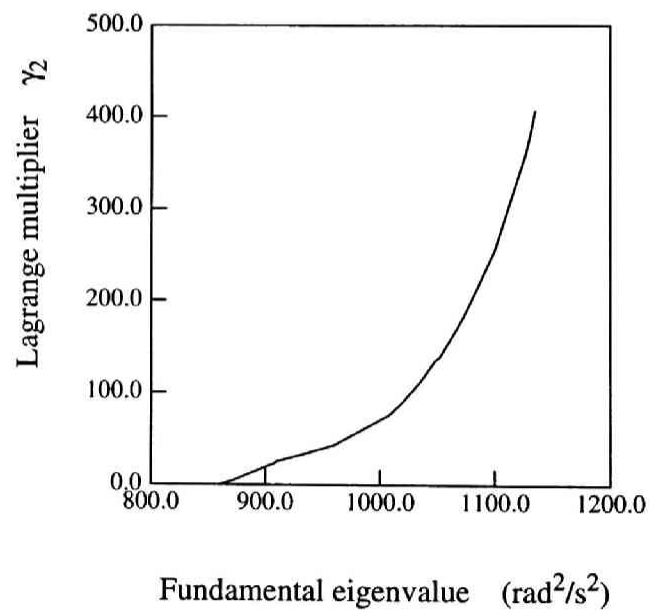


図 3.8 480 部材平板状立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定 1 次固有値とラグランジュ乗数の関係

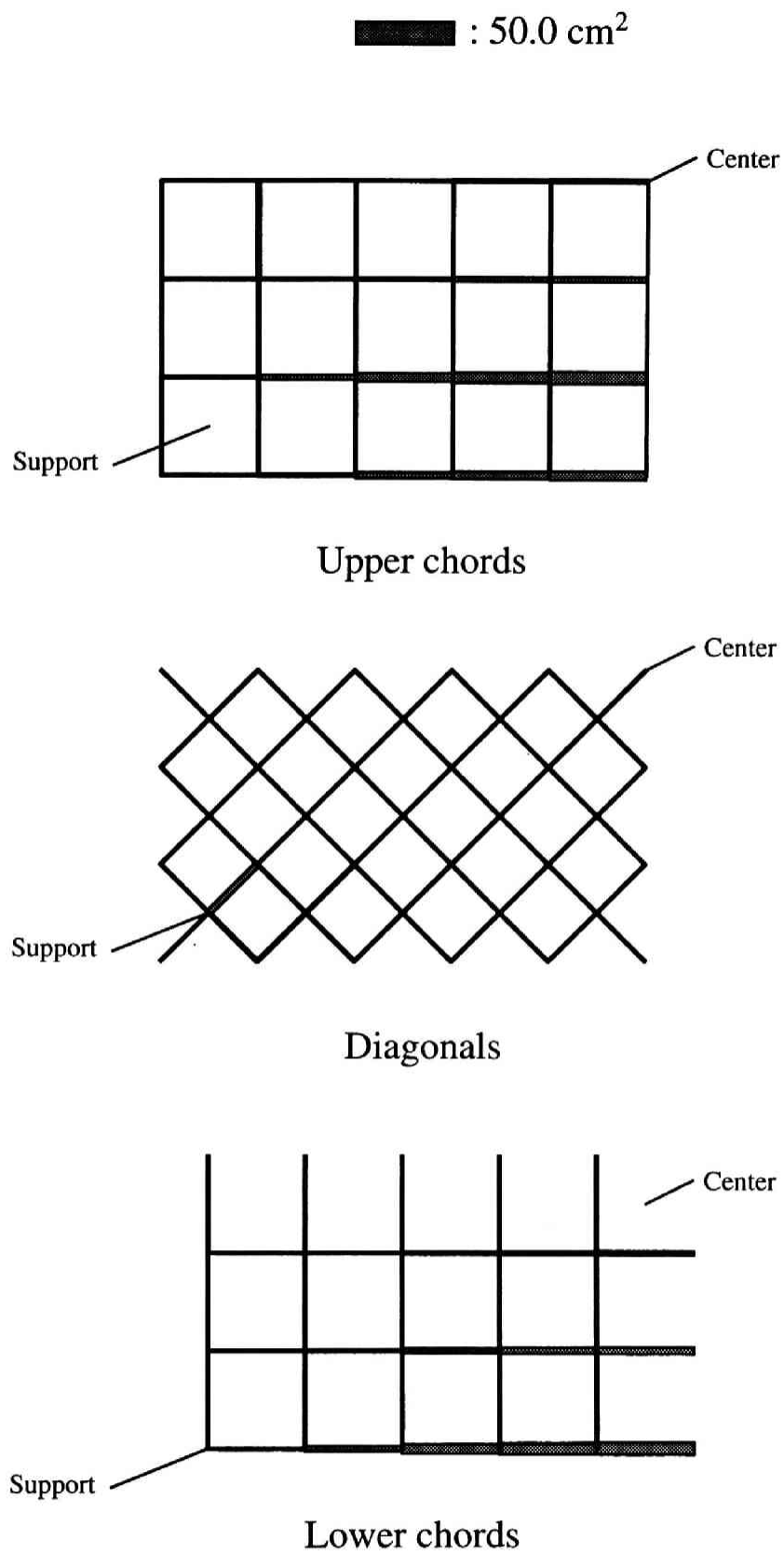


図 3.9(a) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 519.08 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の部材断面積

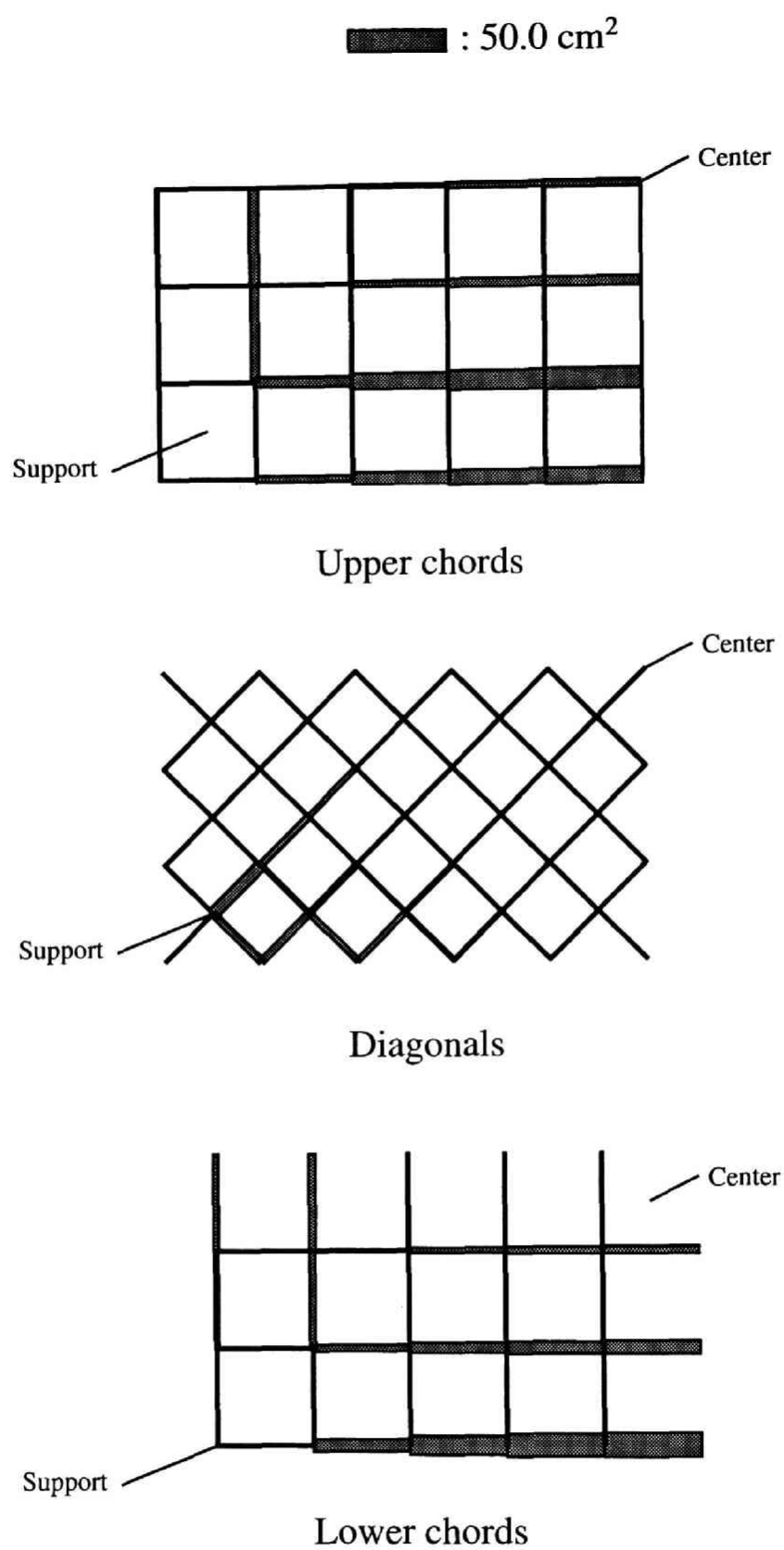


図 3.9(b) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 860.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の部材断面積

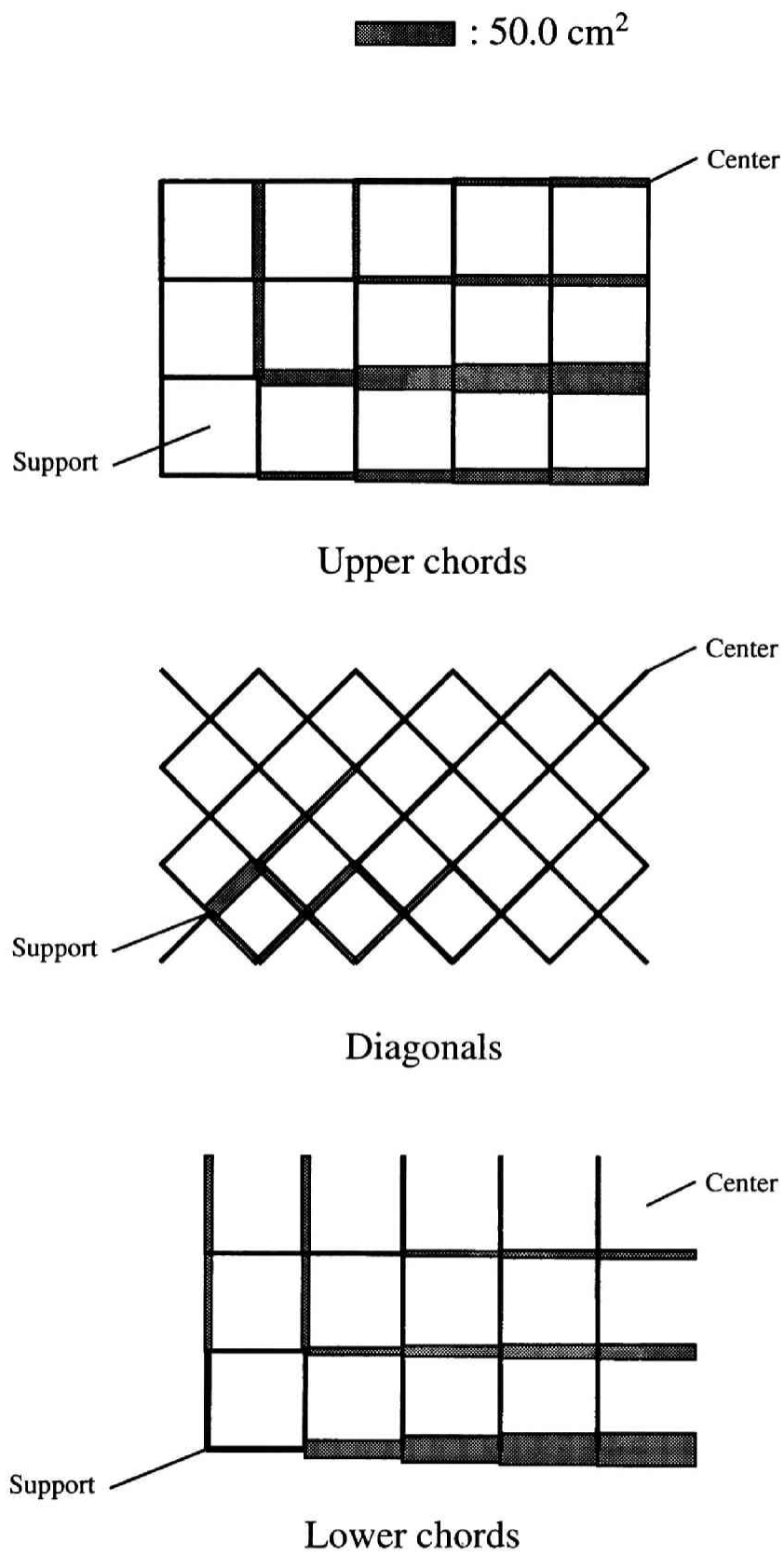


図 3.9(c) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 1008.2 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の部材断面積

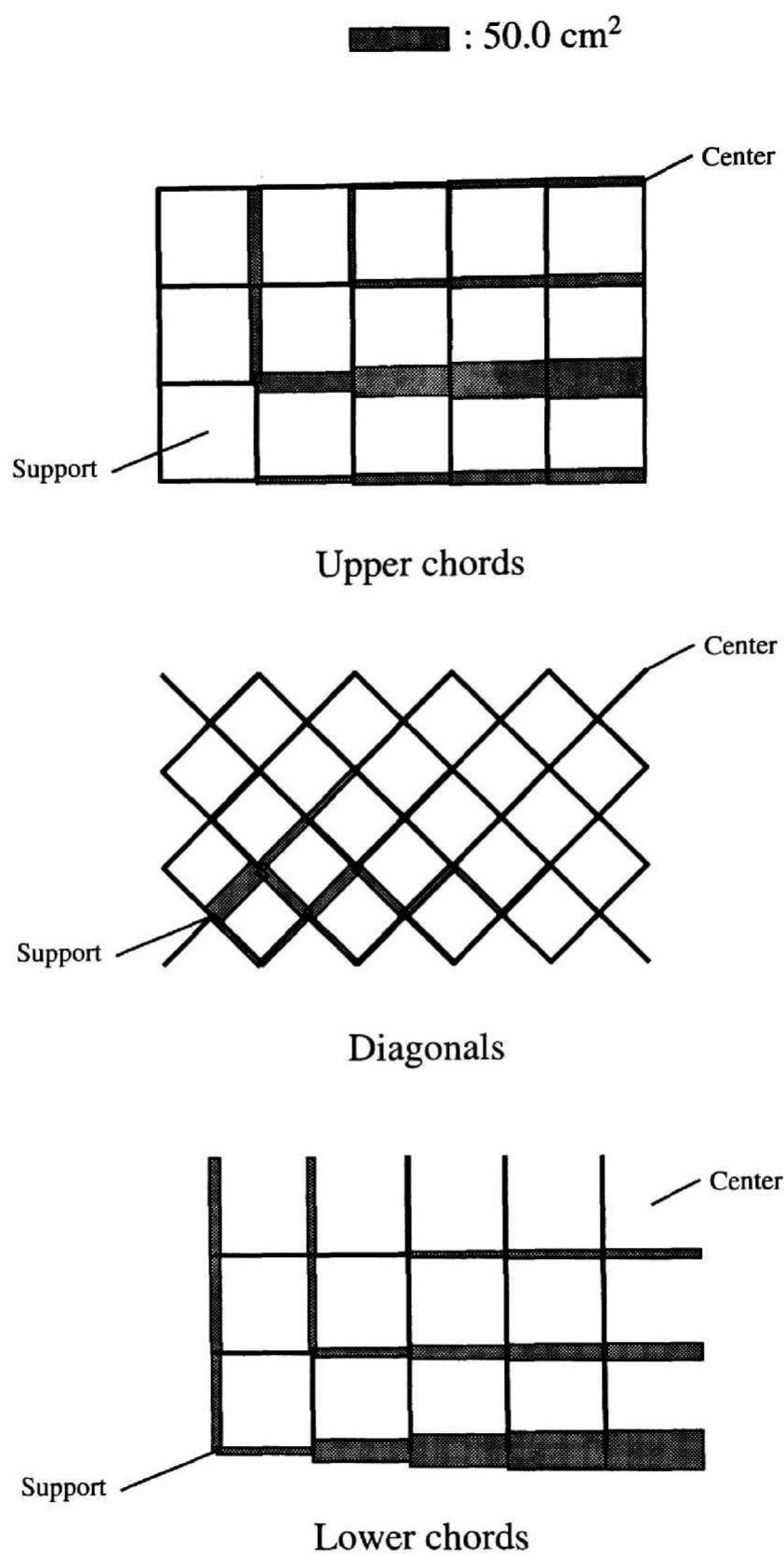


図 3.9(d) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 1134.9 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の部材断面積

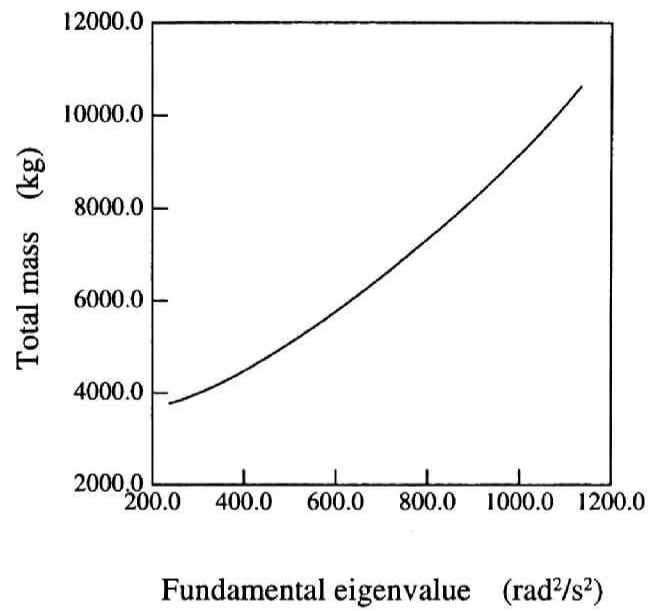


図 3.10 480 部材平板状立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定 1 次固有値と全部材質量の関係

表 3.3 480 平板状立体トラスの $\Omega_a = \Omega_B = 860.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ における固有値 (rad^2/s^2)

	xz 平面に関して 対 称		xz 平面に関して 逆 対 称	
	1 次		2 次	3 次
yz 平面に関して 対称	859.84 (860.11)		859.97 (860.11)	1444.5
yz 平面に関して 逆対称	4 次	5 次	6 次	
	1293.6	3259.0	2689.1	

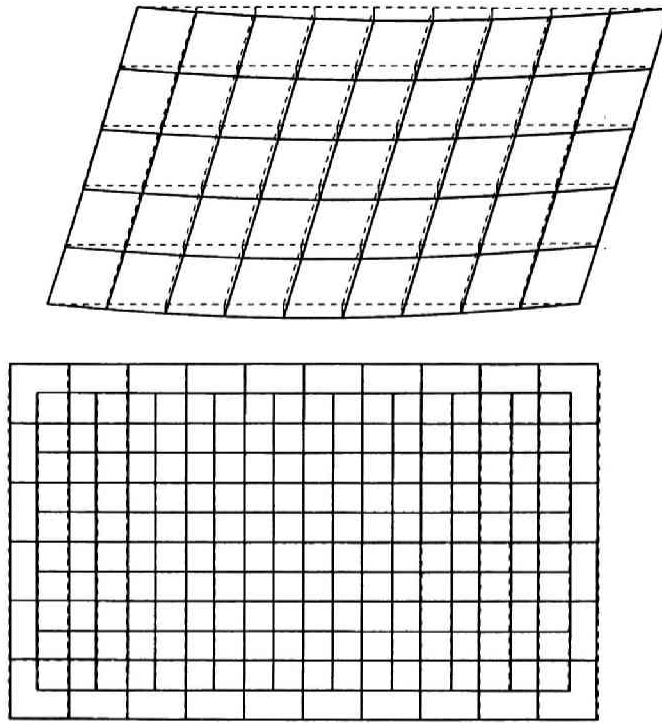


図 3.11(a) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 519.08 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の 1 次固有モード

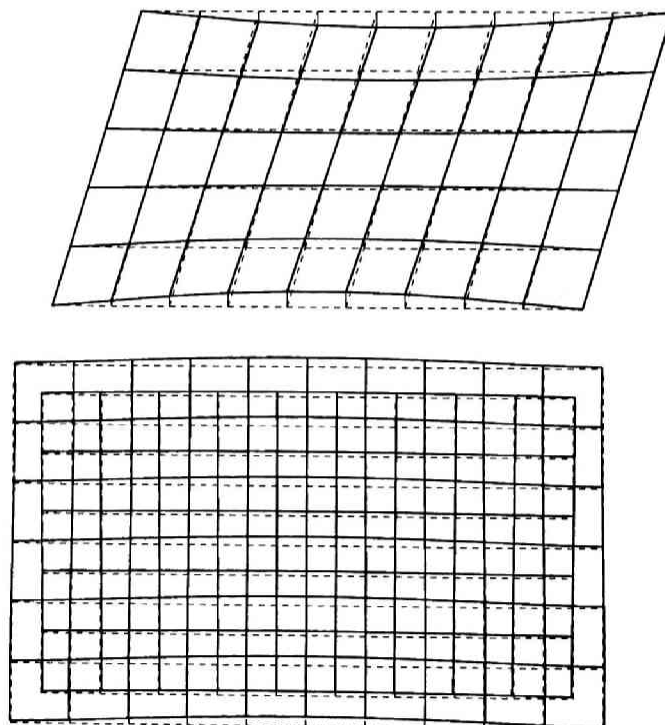


図 3.11(b) 480 部材平板状立体トラスの $\Omega_a = 519.08 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対する
最適設計解の 2 次固有モード

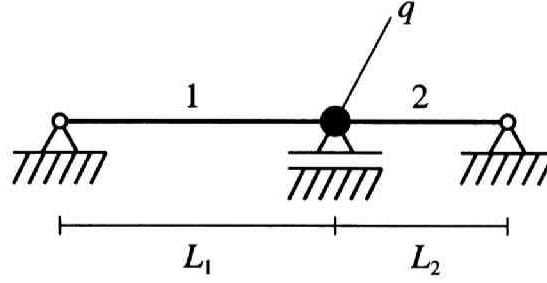


図 3.12 2 部材不静定トラス

2 部材不静定トラスの微分係数の存在条件

微分係数の存在条件について考察するため、図 3.12 に示すような 2 部材 1 自由度の不静定トラスに対する例題を示す。集中質量行列を用いると、1 次固有値は次式で与えられる。

$$\Omega_1 = \frac{E(A_1/L_1 + A_2/L_2)}{q + \rho(A_1L_1 + A_2L_2)/2} \quad (3.70)$$

ここで、 q は中央節点に存在する集中質量である。また、最小断面積制限値は、 $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = 0$ とする。このとき、

$$Q = q + \rho(A_1L_1 + A_2L_2)/2 \quad (3.71)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial A_1} &= \frac{E(2L_2Q - \rho A_1L_1L_2 - \rho A_2L_1^2)}{2L_1L_2Q^2} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial A_2} &= \frac{E(2L_1Q - \rho A_2L_1L_2 - \rho A_1L_2^2)}{2L_1L_2Q^2} \end{aligned} \quad (3.72a, b)$$

及び

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1^2} &= \frac{E\rho(\rho A_1L_1L_2 + \rho A_2L_1^2 - 2L_2Q)}{2L_2Q^3} \\ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_2^2} &= \frac{E\rho(\rho A_2L_1L_2 + \rho A_1L_2^2 - 2L_1Q)}{2L_1Q^3} \\ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1 \partial A_2} &= \frac{E\rho(\rho A_1L_1L_2^2 + \rho A_2L_1^2L_2 - L_1^2Q - L_2^2Q)}{2L_2L_2Q^3} \\ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_2 \partial A_1} &= \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1 \partial A_2} \end{aligned} \quad (3.73a \sim d)$$

を得る。これらの式を用いると、 $L_1 \neq L_2$ 及び $L_1 = L_2$ の 2 つの場合に対して、微分係数の存在条件に関して次のような考察が得られる。

$L_1 \neq L_2$ のとき

いま, $L_1 < L_2$ とする。最適設計解において $A_1 > 0$, $A_2 = 0$ が成立するものとする, (3.10a, b), (3.11) 及び (3.72a, b) より, 最適性条件は次のように書ける。

$$\begin{aligned}\gamma_1 \frac{E(2L_2Q - \rho A_1 L_1 L_2)}{2L_1 L_2 Q^2} &= \rho L_1 \\ \gamma_1 \frac{E(2L_1Q - \rho A_1 L_2^2)}{2L_1 L_2 Q^2} &\leq \rho L_2\end{aligned}\quad (3.74a, b)$$

(3.74a) より

$$\gamma_1 = \frac{2\rho L_1^2 L_2 Q^2}{E(2L_2Q - \rho A_1 L_1 L_2)} \quad (3.75)$$

が成立し, (3.75) を (3.68b) に代入して整理すると, 次の不等式を得る。

$$2\rho Q(L_1^2 - L_2^2) \leq 0 \quad (3.76)$$

$L_1 < L_2$ より (3.76) は明らかに成立する。以上より, 最適性条件が満たされ, 最適設計解において $A_1 > 0$, $A_2 = 0$ が成立することが示された。 $A_1 > 0$, A_2 とした場合及び, $A_1 = 0$, $A_2 > 0$ とした場合に矛盾が生じることは, 同様の式展開によって示すことができる。

$A_1 > 0$, $A_2 = 0$ のとき, 2.9 節における行列 $G_{i, \mathbf{x}' \mathbf{x}'}$ は 1 行 1 列の行列 $\left[-\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1^2} \right]$ となる。 $A_2 = 0$ を用いると, (3.73a) より

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1^2} = -\frac{\rho E q}{Q^3} \quad (3.77)$$

となり, $\left[-\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1^2} \right]$ は正定値である。このとき, 2.9 節に示したように, 最適設計解の Ω_a に関する微分係数が存在する。 $L_1 > L_2$ の場合も同様である。

$L_1 = L_2$ のとき

この場合には, (3.72a, b) より $\frac{\partial \Omega_1}{\partial A_1} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial A_2}$ が成立するから, 最適性条件より明らかに $A_1 > 0$ かつ $A_2 > 0$ であるような最適設計解が存在し, 行列 $G_{i, \mathbf{x}' \mathbf{x}'}$ は 2 行 2 列の正方行列となる。このとき, (3.73a ~ d) より

$$\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1^2} = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_1 \partial A_2} = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_2 \partial A_1} = \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial A_2^2} \quad (3.78)$$

が成立するから, 行列 $G_{i, \mathbf{x}' \mathbf{x}'}$ は非正則な行列である。したがって, 最適設計解の Ω_a に関する微分係数は不定となる。このことは, $L_1 = L_2$ の場合には, $A_1 + A_2$ が一定であるような任意の A_1 と A_2 の組に対して, 1 次固有値は同一の値をとること, すなわち最適設計解が不定であることと対応する。

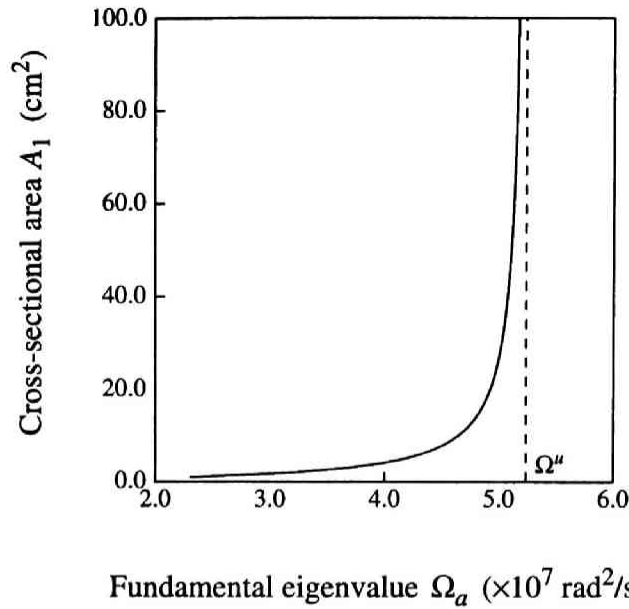


図 3.13 2 部材不静定トラスの指定 1 次固有値と第 1 部材の断面積の関係

次に、 $L_1 \neq L_2$ の場合について、2.9 節での条件 **C6** が満たされない例を示す。いま、 $L_1 = 100 \text{ cm}$ 、 $L_2 = 150 \text{ cm}$ 、 $q = 100 \text{ kg}$ とする。このとき、 $L_1 < L_2$ であり、最適設計解において $A_1 > 0$ 、 $A_2 = 0$ が成立し、 A_1 の Ω_a に関する微分係数は存在する。 Ω_a と A_1 の関係は図 3.13 のようになり、この曲線は $\Omega_a = \Omega^u = 5.2366 \times 10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ の直線に漸近する。 Ω_a が Ω^u に近づくにつれて、トラス部材による構造質量は急激に増加し、非構造質量 q と比べて非常に大きい値をとり、 q の ρA_1 に対する比は 0 に近づく。ところで、 $q = 0$ のときには剛性行列及び質量行列はともに A_1 に比例するから、(3.1) より明らかなように、1 次固有値は任意の A_1 の値に対して唯一の値をとる。 $\Omega^u = 5.2366 \times 10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ は $q = 0$ かつ $A_2 = 0$ の場合の、任意の A_1 の値に対応する唯一の固有値の値であり、図 3.13 より、明らかに $\Omega_a \rightarrow \Omega^u$ のとき $\frac{\partial \Omega_1}{\partial A_1} \rightarrow 0$ となり、**C6** は満たされず、 A_1 の Ω_a に関する微分係数は求められなくなる。

15 部材平面トラスの最適設計解順序集合 (最小断面積制限値の存在しない場合)

最小断面積制限値が存在しない場合の例として、図 3.14 のような 15 部材平面トラスに対して、最適設計解順序集合を求めた。各節点に存在する集中質量は 1000.0 kg である。 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ の自明な最適設計解を初期設計解とし、 Ω_a に関する 4 階の微分係数まで求めた。10 部材トラスの例から、 Ω_a を 0 から増加させたとき第 5、10 及び 15 部材の断面積は 0 にとどまるものと仮定した。変位の自由度は 12 であるから、12 個の部材の断面積が 0 から増加し、静定トラスが形成されることになる。 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ での、各部材の断面積の Ω_a に関する微分係数を表 3.4 に示す。表 3.4 の微分係数を用いて得られる A_1 、 A_6 及び A_{11} と Ω_a の関係を図 3.15 に

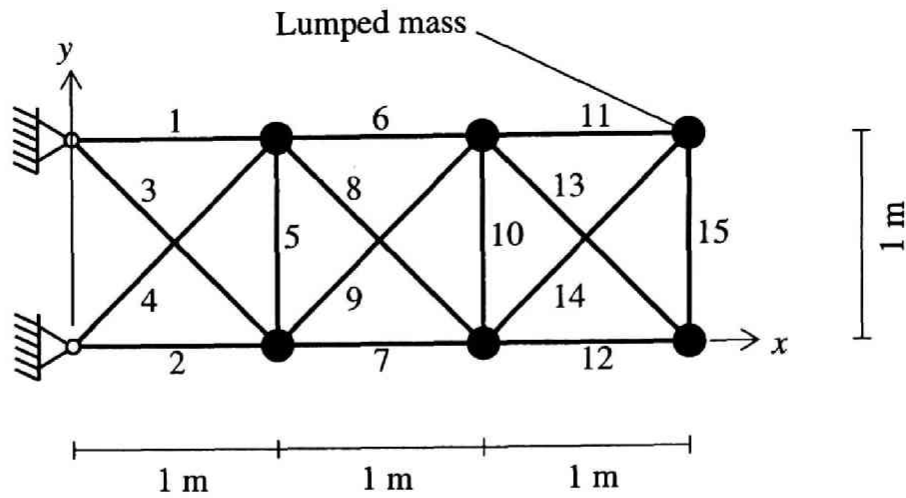


図 3.14 15 部材平面トラス

表 3.4 15 部材平面トラスの最適設計解における部材断面積の Ω_a に関する微分係数

部材番号	微 分 係 数			
	1 階 ($10^{-3}\text{cm}^2\text{s}^2$ /rad ²)	2 階 ($10^{-8}\text{cm}^2\text{s}^4$ /rad ⁴)	3 階 ($10^{-14}\text{cm}^2\text{s}^6$ /rad ⁶)	4 階 ($10^{-19}\text{cm}^2\text{s}^8$ /rad ⁸)
1	5.24781	2.05475	1.12329	2.33957
2	5.24781	2.05475	1.12329	2.33957
3	1.78666	0.845965	1.29196	0.728003
4	1.78666	0.845965	1.29196	0.728003
5	0.0	0.0	0.0	0.0
6	2.81827	0.636417	-1.35874	1.57097
7	2.81827	0.636417	-1.35874	1.57097
8	1.58051	0.453514	-0.600247	0.851885
9	1.58051	0.453514	-0.600247	0.851885
10	0.0	0.0	0.0	0.0
11	0.874636	-0.199932	1.60623	-1.79905
12	0.874636	-0.199932	1.60623	-1.79905
13	1.03077	-0.225182	1.66448	-1.70172
14	1.03077	-0.225182	1.66448	-1.70172
15	0.0	0.0	0.0	0.0

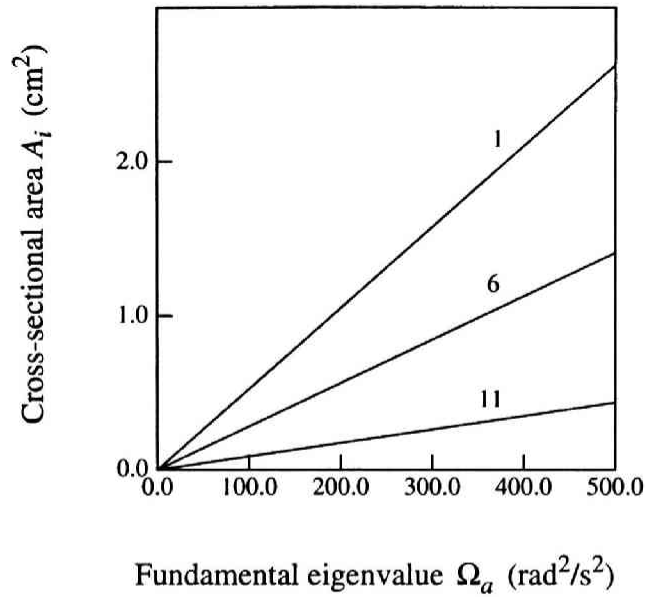


図 3.15 15 部材平面トラスの最適設計解順序集合における
指定 1 次固有値と部材断面積の関係

表 3.5 15 部材平面トラスの最適設計解における $\frac{\zeta_i^1/L_i}{\zeta_3^1/L_3}$ の値

部材番号	1	2	3	4	5
$\frac{\zeta_i^1/L_i}{\zeta_3^1/L_3}$	0.999992	0.999992	1.00000	1.00000	-0.356507×10^{-3}
	6	7	8	9	10
	0.999992	0.999992	0.999989	0.999989	-0.249664×10^{-2}
	11	12	13	14	15
	0.999990	0.999990	0.999981	0.999981	-0.872150×10^{-2}

示す。 $\Omega_a = 1000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する，テイラー展開で得られた最適設計解に対して固有値解析を行なった結果，得られた 1 次固有値は $1000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であった。この結果より，比較的大きい値の指定 1 次固有値まで，良好な精度の最適設計解が得られていることがわかる。また， $\Omega_a = 1000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ のトラスに対して $\frac{\zeta_i^1/L_i}{\zeta_3^1/L_3}$ の値を計算した結果を表 3.5 に示す。表 3.5 より，それらの値は $A_i > \bar{A}_i$ である部材ではほぼ 1 に一致し， $A_i = \bar{A}_i = 0$ である部材では 1 以下の値をとっていることがわかる。したがって，最適性条件についても良好な精度で満たされているといえる。さらに， $\Omega_a = 500.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ， $1000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $2000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ のときの最適部材断面積分布を図 3.16(a ~ c) に示す。これらの図より， Ω_a を増加させると， x 方向の部材

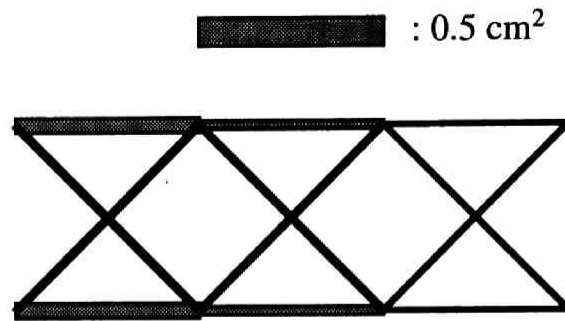


図 3.16(a) 15 部材平面トラスの $\Omega_a = 500.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する
最適設計解の部材断面積

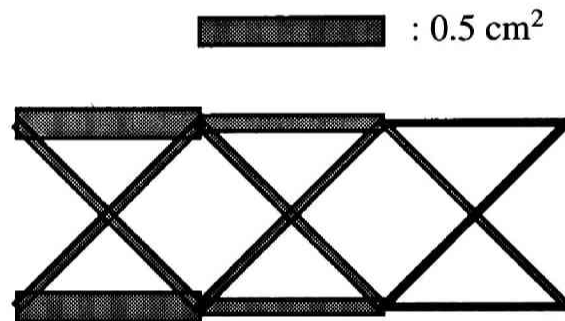


図 3.16(b) 15 部材平面トラスの $\Omega_a = 1000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する
最適設計解の部材断面積

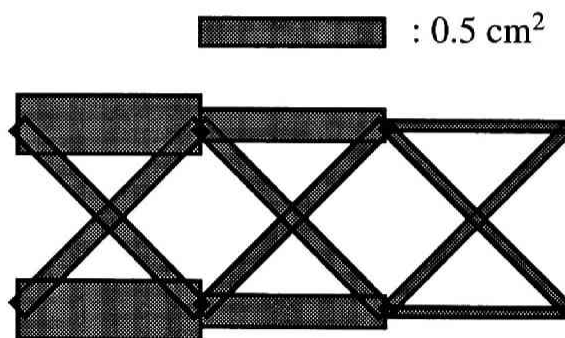


図 3.16(c) 15 部材平面トラスの $\Omega_a = 2000.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する
最適設計解の部材断面積

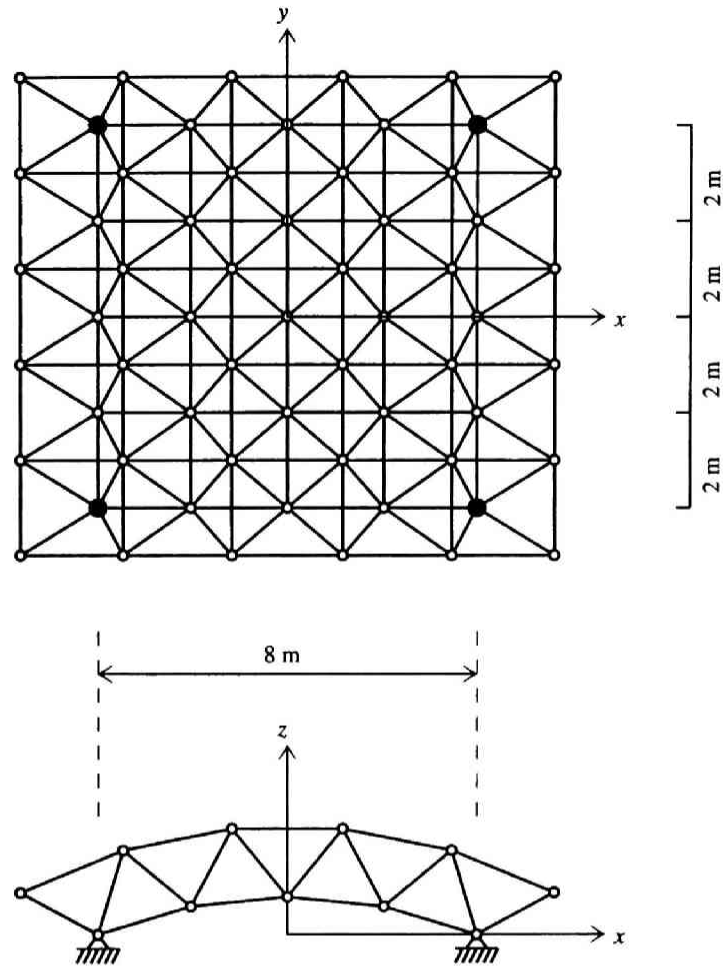


図 3.17 200 部材円筒状立体トラス

の断面積が支点に近い部材から増加し、全体として梁に相当する構造物が形成されていることがわかる。

200 部材円筒状立体トラスの最適曲率半径

図 3.17 のような、4 隅をピン支持された 200 部材円筒状立体トラスに対して、種々の曲率半径に対応する最適設計解順序集合を生成し、最適曲率半径を求めた。上層節点と下層節点の存在する 2 つの円筒は共通の軸をもち、全ての節点は、幾何学的形状パラメータとしての、下層節点の存在する円筒の曲率半径 R で完全に決定される。円筒の x 及び y 方向の分割数は定められており、斜材及び x 、 y 方向の上、下弦材の部材長は、各 R ごとにそれぞれ一定である。また、上、下層節点の存在する円筒の曲率半径の差 H は 1.5 m であり、全部材に対して一定の、 1.0 cm^2 の最小断面積制限値を与える。上層節点に 800.0 kg (4 辺では 400.0 kg, 4 隅では 200.0 kg) の集中

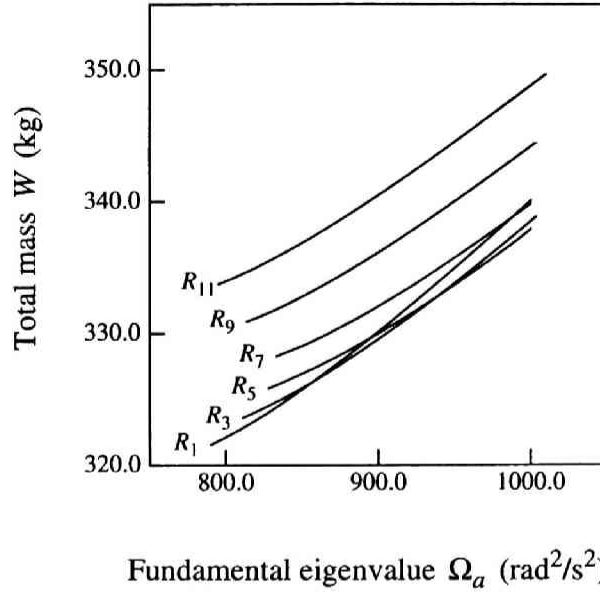


図 3.18 200 部材円筒状立体トラスの種々の R の値に対応する最適設計解
順序集合における、指定 1 次固有値と全部材質量の関係

質量を与え、 $\Delta\Omega_a$ は 1 次固有値が重複しない領域では $20.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、1 次固有値が重複する領域では $4.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。

R の上限値 R_u を 45.895 m とし、種々の曲率半径 $R_1 = 45.895 \text{ m}$, $R_2 = 32.822 \text{ m}$, $R_3 = 25.570 \text{ m}$, $R_4 = 20.963 \text{ m}$, $R_5 = 17.782 \text{ m}$, $R_6 = 15.455 \text{ m}$, $R_7 = 13.681 \text{ m}$, $R_8 = 12.286 \text{ m}$, $R_9 = 11.162 \text{ m}$, $R_{10} = 10.237 \text{ m}$ 及び $R_{11} = 9.4648 \text{ m}$ を有するトラスについて、最適設計解順序集合を生成した。 R を補助パラメータとした最適設計解順序集合における Ω_a と W の関係を $\{R_i\} = \{R_1, R_3, R_5, R_7, R_9, R_{11}\}$ に対して図 3.18 に示す。1 次固有モードは $15.455 \text{ m} \leq R \leq 45.895 \text{ m}$ では xz , yz 両平面に関して対称であり、 $9.4648 \text{ m} \leq R \leq 13.681 \text{ m}$ では、 xz 平面に関して対称、 yz 平面に関して逆対称である。種々の R の値に対する最適設計解順序集合が得られると、ある特定の Ω_a に対する最適設計解における R と W の関係を得ることができる。 $\Omega_a = 840.00 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $895.00 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ での W と R の関係を図 3.19(a,b) に示す。図 3.19(a,b) より、 Ω_a を定めたとき、 W を最小にするような最適曲率半径が存在することがわかる。

図 3.20 には、種々の曲率半径に対する W と Ω_a の関係を、 R に関する最適性必要条件が不等号で成立する範囲、すなわち (3.56b) が成立する範囲に対して描いた。ここで、 $R \geq 13.681 \text{ m}$ では、各曲線において、 Ω_a の最大値 Ω_a^i で、 R に関する最適性条件が等号で満たされている。したがって、指定 1 次固有値 $\Omega_a = \Omega_a^i$ が与えられたとき、その曲率半径 R_i は最適曲率半径である。また、 R の上限値を $R_1 = 45.895 \text{ m}$ としたため、図 3.20 で示した $\Omega_a^{(2)}$ 以下の指定 1 次固有値では、 $R = 45.895 \text{ m}$ が最適な曲率半径であることがわかる。さらに、 $\Omega_a^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega_a^{(3)}$

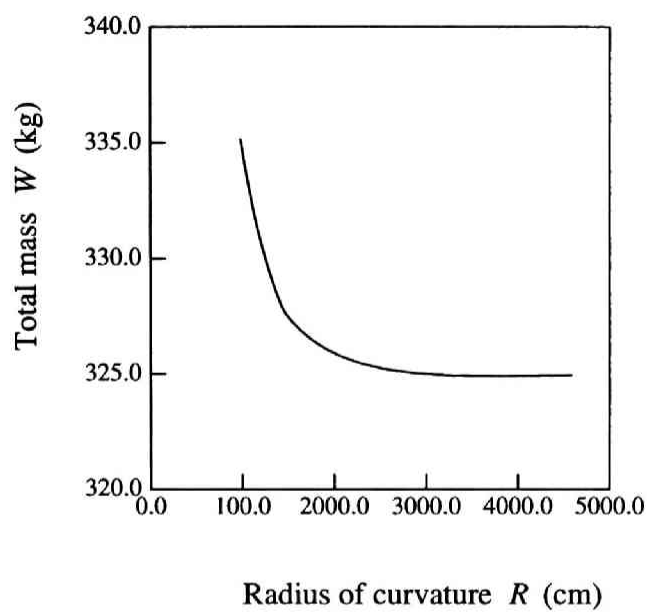


図 3.19(a) 200 部材円筒状立体トラスの $\Omega_a = 840.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する最適設計解における，曲率半径と全部材質量の関係

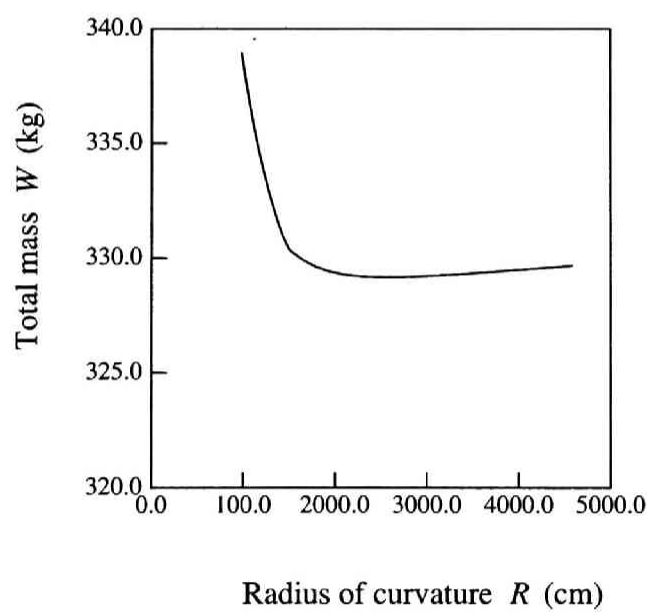


図 3.19(b) 200 部材円筒状立体トラスの $\Omega_a = 895.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対応する最適設計解における，曲率半径と全部材質量の関係

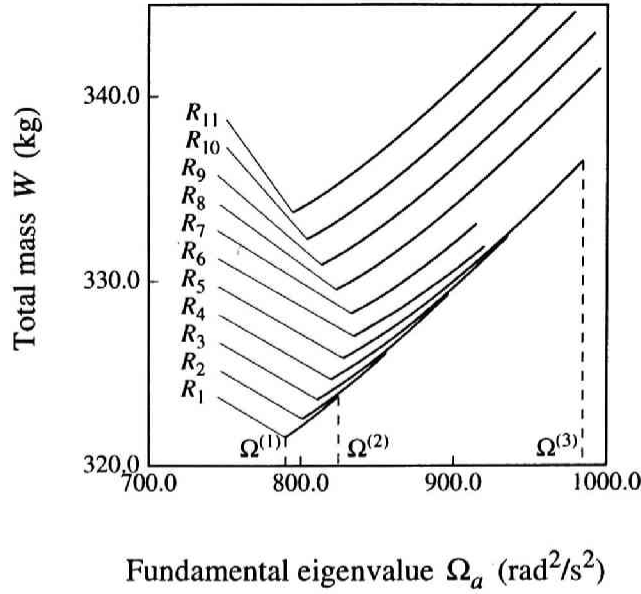


図 3.20 200 部材円筒状立体トラスの種々の曲率半径に対応する
最適設計解順序集合における, (3.52b) が成立する範囲での
指定 1 次固有値と全部材質量の関係

に対しては, 最適曲率半径は, $R_5 = 17.782 \text{ m}$ 以上となっている。 $R \geq 17.782 \text{ m}$ では, その最適設計解において, 1 次固有モードは対称なモードであるから, 1 次固有値が $\Omega_a^{(1)} \leq \Omega_a \leq \Omega_a^{(3)}$ を満たすようなトラスでは, 1 次固有モードが対称モードとなるような曲率半径を選択するのが望ましいことがわかる。

192 部材平板状立体トラスの 2 段階最適設計

図 3.21 のような, 弾性支持された 192 部材平板状立体トラスに対して, 3.6 節の理論に基づき, 2 段階最適設計解を求めた。斜材と上, 下層平面のなす角度は 45° であり, 全部材に対して一定の, 2.0 cm^2 の最小断面積制限値を与える。また, 上層節点に 800.0 kg (4 辺では 400.0 kg , 4 隅では 200.0 kg) の集中質量を与える。支点に接続するバネの伸び剛性は, $4.116 \times 10^7 \text{ N/m}$ である。図 3.22 の曲線は, Ω_a を $\Omega_a = \bar{\Omega} = 587.45 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ から増加させて, 最適設計解順序集合を生成した結果得られた Ω_a と W の関係を, Ω_a の領域 $587.45 \text{ rad}^2/\text{s}^2 \leq \Omega_a \leq 3068.8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ に対して示したものである。図 3.22 より, W は Ω_a の単調増加凸関数であることがわかる。この最適設計解順序集合に対して, input-output ratio を最小化する問題 Problem FDP1 の解を求めた結果, $C^F = 0.16344 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{rad}^2$ であり, それに対応する Ω_a 及び W の値は, それぞれ $1901.5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び 310.78 kg であった。図 3.22 の直線は, $W = C^F \Omega_a$ の直線を示したものである。この例では, 2 段階最適設計解における 1 次固有値 Ω_a^F は, Ω_a の領域の内部の点となっている。

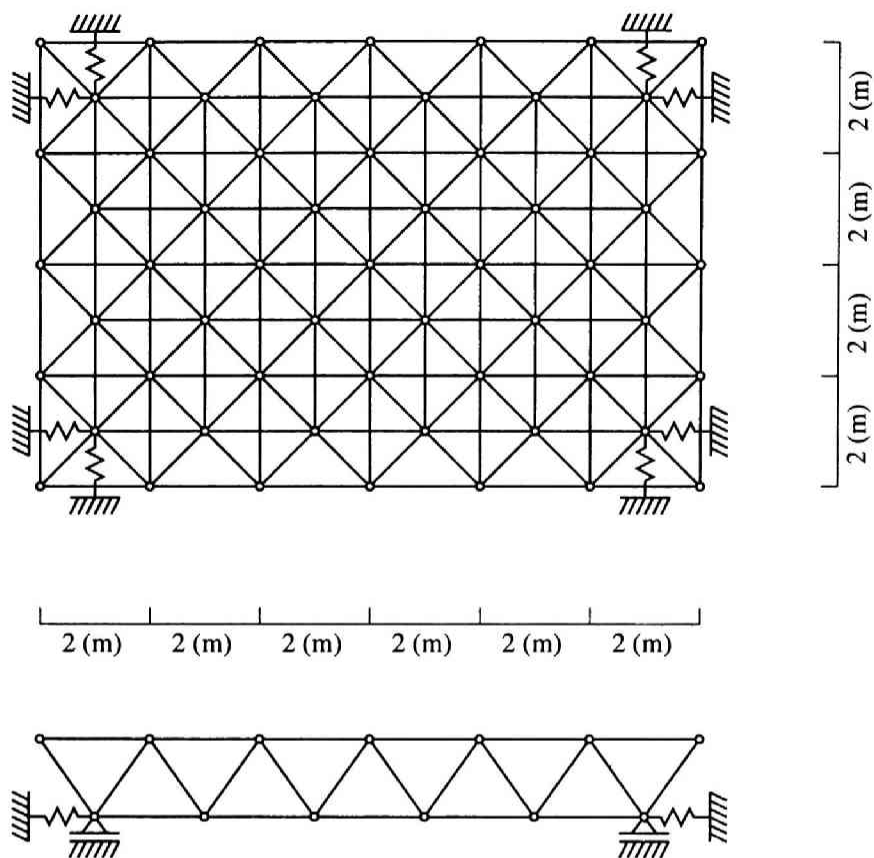


図 3.21 192 部材平板状立体トラス

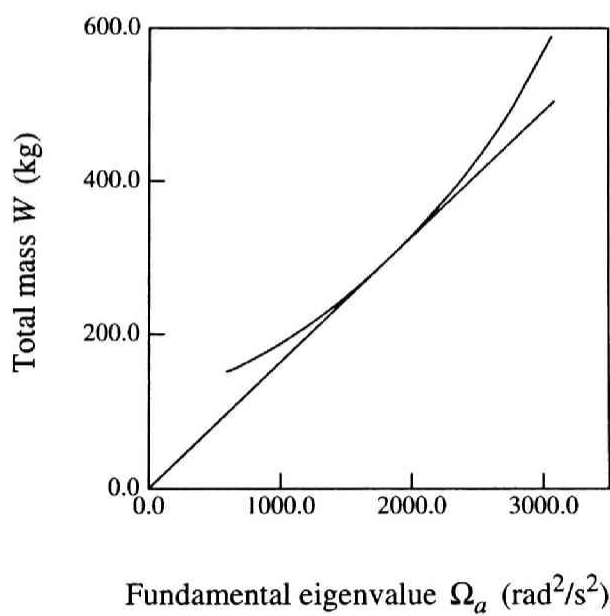


図 3.22 192 部材平板状立体トラスの最適設計解順序集合と、
input-output ratio を最小化する 2 段階最適設計解

3.9 3章の結論

本章では、指定1次固有振動数を有する最適トラスの順序集合生成法に関して、以下のような成果を得た。

1. 指定1次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対して、「最適設計解順序集合」という新しい概念を導入し、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を求める手法を開発した。本手法を用いると、種々の指定1次固有値に対する最適設計解を容易に得ることができ、全部材質量、高次固有振動数等に関する指定1次固有振動値をパラメータとした種々の設計図表を設計者に対して提供することができる。
2. 1.の最適設計解順序集合生成法が、これまで大規模トラスに対して有効な一般的手法が存在しなかった、指定重複1次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対しても、何の困難もなく適用できることを示した。
3. 480部材平板状立体トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、本手法の有効性を示すとともに、最適設計解の特性を明らかにした。
4. 最小断面積制限値の存在しない場合について、部材断面積の全く存在しないトラスを初期設計解として、最適設計解順序集合を生成する理論を展開した。本理論によると、指定1次固有値に関する3階以上の高階微分係数を容易に計算することができ、十分大きい値の指定1次固有値に対応する最適設計解まで、容易に求めることができる。
5. 指定1次固有値に関する微分係数の存在条件について、簡単なトラスを用いて考察した。さらに、指定し得る1次固有値に関して上限値が存在することを、例証した。
6. 1.の指定1次固有値をパラメータとした最適設計解順序集合生成法に基づき、節点位置が1つの幾何学的形状パラメータで完全に決定されるようなトラスに対して、最適設計解順序集合を生成することにより、種々の指定1次固有値に対応する最適幾何学的形状パラメータを得ることのできる、実用的手法を開発した。
7. 6.の手法を用いて、200部材円筒状立体トラスに対して種々の曲率半径を与えて最適設計解順序集合を生成し、1次固有値の指定値ごとに最適曲率半径が存在することを明らかにした。
8. Fractional programmingの定式化に基づき2段階最適設計問題を概念を定式化し、1つの最適設計解順序集合から、最も望ましい最適設計解を選択するための理論を展開した。

参考文献

- [1] V.B. Venkayya and V.A. Tishler, Optimization of structures with frequency constraints, in: Computer Methods in Nonlinear Solids Structural Mechanics ASME-AMD-54, ASME, New York, pp239-259, 1983.
- [2] L. Bellagamba and T.Y. Yang, Minimum-mass truss structures with constraints on fundamental natural frequency, AIAA J., Vol.11, pp1452-1458, 1981.
- [3] H. Miura and L.A. Schmit, Second order approximation of natural frequency constraints in structural synthesis, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.13, pp337-351, 1978.
- [4] N.S. Khot, Optimization of structures with multiple frequency constraints, Comput. & Struct., Vol.20(5), pp869-876, 1985.
- [5] W.R. Spilleres, S. Singh and R. Levy, Optimization with frequency constraint, J. Struct. Div., ASCE, Vol.107(ST12), pp2337-2347, 1981.
- [6] 山川 宏, 房前 芳一, 斉藤裕一, 振動を考慮した構造物の最適設計について (第5報, 複数の固有振動数を考慮した場合の最小重量設計), 日本機械学会論文集, Vol.44(387), pp3759-3766, 1978.
- [7] C.Y. Sheu, Elastic minimum-weight design for specified fundamental frequency, Int. J. Solids Struct., Vol.4, pp953-958, 1968.
- [8] V.B. Venkayya, Structural optimization: A review and some recommendation, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.13, pp203-228, 1978.
- [9] B.L. Karihaloo and F.I. Niordson, Optimum design of vibrating cantilevers, J. Optimization Theory Appl., Vol.11(6), pp638-654, 1973.
- [10] N. Olhoff, Optimal design with respect to structural eigenvalue, in: Proc. 15th Congress of IUTAM, Tront, pp133-149, 1980.
- [11] M.W. Dobbs and R.B. Nelson, Application of optimality criteria to automated structural design, AIAA J., Vol.14(10), pp1436-1443, 1976.
- [12] J.E. Taylor, Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency, AIAA J., Vol.5(10), pp1911-1913, 1967.
- [13] B.L. Pierson, A survey of optimal structural design under dynamic constraints, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.4, pp491-499, 1972.
- [14] G.N. Vanderplaats and E. Salajegher, An efficient approximation technique for frequency constraints in frame optimization, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.26, pp1057-1069, 1988.
- [15] J. Shamie and L.A. Schmit, Frame optimization including frequency constraints, J. Struct. Div., ASCE, Vol.101(ST1), pp283-293, 1975.

- [16] Y.Y. Wardi and E. Polak, A nondifferentiable optimization algorithm for structural problems with eigenvalue inequality constraints, *J. Struct. Mech.*, Vol.11(4), pp561-577, 1983.
- [17] J. Claudon and M. Sunakawa, Design sensitivity analysis for distributed parameter structural systems governed by double eigenvalue problems, in: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Sijthoff & Noordhoff, pp1516-1538, 1981.
- [18] J. Zolésio, Semi derivatives of repeated eigenvalues, in: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Sijthoff & Noordhoff, pp1457-1473, 1981.
- [19] K.K. Choi and E.J. haug, A numerical method for optimization of structures with repeated eigenvalues, in: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Sijthoff & Noordhoff, pp534-551, 1981.
- [20] B. Rousselet, Multiple eigenvalues and supremum norm constraints, in: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Sijthoff & Noordhoff, pp552-568, 1981.
- [21] K.K. Choi and E.J. Haug, Optimization of structures with repeated eigenvalues, in: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, E.J. Haug and J. Cea (eds.), Sijthoff & Noordhoff, pp219-277, 1981.
- [22] Z. Wanxie and C. Gengdong, Second order sensitivity analysis of multimodal eigenvalues and related optimization techniques, *J. Struct. Mech.*, pp421-436, 1986.
- [23] K.B. Lim, J. Juang and D. Ghaemmaghami, Eigenvector derivatives of repeated eigenvalues using singular value decomposition, *J. Guidance*, Vol.12(2), pp282-283.
- [24] N. Olhoff and S.H. Rasmussen, On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.13, pp605-614, 1977.
- [25] E.F. Masur, Optimal structural design with multiple eigenvalue constraints, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.20(3), pp211-231, 1984.
- [26] Tsuneyoshi Nakamura and M. Ohsaki, Sequential optimal truss generator for frequency ranges, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.67(2), pp189-209, 1988.
- [27] 中村 恒善, 大崎 純, 曲率半径をサブパラメタとした振動数領域に対する最適円筒状立体トラス生成法, *構造工学論文集*, Vol.35B, pp103-110, 1989.
- [28] 中村 恒善, 大崎 純, 指定 1 次固有値に関するテーラー展開手法によるトラスの最適設計, *日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海)*, 構造 I, pp1125-1126, 1985.

- [29] M. Ohsaki and Tsuneyoshi Nakamura, Sequential generator of optimal structures for candidate frequency ranges, in: Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, Proc. OPTI91, Cambridge, MA, C.A. Brebbia and S. Hernandez (eds.), Elsevier, London, pp221-232, 1991.
- [30] Tsuneyoshi Nakamura and I. Takewaki, Optimal elastic structures with frequency-dependent elastic supports, Int. J. Solids Struct., Vol.25(5), pp539-551, 1989.
- [31] Tsuneyoshi Nakamura and I. Takewaki, Ductility design via optimum design of nonlinear elastic frames, J. Struct. Div., ASCE, Vol.115(ST3), pp608-625, 1989.
- [32] 中村 恒善, 竹脇 出, 弾性支持されたせん断型構造物の一次固有周期制約条件下の最適設計, 構造工学論文集, Vol.31B, pp93-102, 1985.
- [33] 中村 恒善, 伊藤 均, 建築ラーメンの一次固有周期制約条件下の最適設計, その 1: 基本的閉形解, pp947-948, その 2: 材軸方向力の効果を考慮した理論, pp949-951, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), 構造, 1980.
- [34] 中村 恒善, 山根 尚志, 1 次固有周期制約条件下の最適設計解とそれに基づく地震時最大応答変位の最大値の制御, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 構造, pp1041-1042, 1983.
- [35] Tsuneyoshi Nakamura and T. Yamane, Optimum design and earthquake-response constrained design of elastic shear buildings, Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.14(5), pp797-815, 1986.
- [36] 中村 恒善, 山根 尚志, 1 次固有周期制約条件で最適設計解された剪断型構造物の高次振動数算定式, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 構造, pp835-836, 1981.
- [37] 中村 恒善, 中村 豊, 偏心のある構造物モデルの 1 次固有周期制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), 構造, pp801-802, 1982.
- [38] 中村 恒善, 竹脇 出, 弾性支持された剪断型建築骨組モデルの一次固有周期制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 構造 I, pp847-848, 1984.
- [39] 中村 恒善, 久恒 治郎, 2 層毎に一定の剛性を有するせん断型構造物モデルの最適設計解とそれに基づく地震時最大変位の最大値の制御, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 構造 I, pp849-850, 1984.
- [40] 中村 恒善, 竹脇 出, 弾性支持された建築ラーメンの一次固有周期および最小曲げ剛性制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 構造 I, pp1043-1044, 1983.
- [41] 中村 恒善, 山田 祐司, 一次固有周期と崩壊荷重係数に制約を受ける建築ラーメンの最小コスト設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 構造 I, pp2321-2322, 1983.
- [42] 中村 恒善, 竹脇 出, ロッキングを考慮した建築ラーメンの 1 次固有周期制約条件下の最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 構造, pp833-834, 1981.

- [43] 後藤 憲司, 中村 恒善, 上層部と下層部で異なる 2 軸共通偏心軸を有するせん断型構造物モデルの最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp583-584, 1990.
- [44] 島野 幸弘, 中村 恒善, 弾性建築骨組－杭－地盤連成系の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp625-626, 1990.
- [45] 龍 正哉, 中村 恒善, 二層等剛性せん断型構造物の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp627-628, 1990.
- [46] 五十子 幸樹, 中村 恒善, 弾性支持された構造物の 1 次固有周期制約条件下の最適設計に関する不等式, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp1103-1104, 1990.
- [47] 西影 武知, 中村 恒善, 基礎梁を持たない杭支持平面ラーメンの 1 次固有周期制約条件下における最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp1105-1106, 1990.
- [48] L.A. Schmit and K.J. Chang, Optimum design sensitivity based on approximation concepts and dual method, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.20, pp39-75, 1984.
- [49] H.M. Adelman and R.T. Haftka, Sensitivity analysis of discrete structural systems, AIAA J., Vol.24(5), pp823-832, 1986.
- [50] G.N. Vanderplaats and N. Yoshida, Efficient calculation of optimum design sensitivity, AIAA J., Vol.23(11), pp1798-1803, 1985.
- [51] J. Sobieszczanski-Sobieski, J. Barthelemy and K.M. Riley, Sensitivity of optimum solutions of problem parameters, AIAA J., Vol.20(9), pp1291-1299, 1982.
- [52] J. Barthelemy and J. Sobieszczanski-Sobieski, Optimum sensitivity derivatives of objective functions in nonlinear programming, AIAA J., Vol.21(6), pp913-915, 1983.
- [53] J. Barthelemy and J. Sobieszczanski-Sobieski, Extrapolation of optimum design based on sensitivity derivatives, AIAA J., Vol.21(5), pp797-799, 1983.
- [54] G.N. Vanderplaats, An efficient feasible directions algorithm for design synthesis, AIAA J., Vol.22(11), pp1633-1640, 1984.
- [55] K. Swarup, Linear fractional functionals programming, Operations Research, Vol.13, pp1029-1036, 1968.
- [56] G.V. Loganathan, Benefit-cost problems: A bi-criteria approach, Engineering Optimization, Vol.13, pp225-234, 1988.
- [57] W. Prager and J.E. Taylor, Problems of optimal structural design, J. Appl. Mech., Vol.35, pp102-106, 1968.
- [58] 福島 雅夫, 非線形最適化の基礎, 産業図書, 1980.
- [59] E.A. Sedek, Dynamic optimization of framed structures with variable layout, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.23, pp1273-1294, 1986.
- [60] U. Kirsch, Optimal topologies of structures, Appl. Mech. Rev., Vol.42, engn pp223-239, 1989.

4 章 指定強震時応答ひずみを有する最適 トラスの順序集合生成法†

4.1 序

動的な外乱が作用したときの最大弾性応答変位、最大弾性応答応力等に関する制約条件を満たし、かつ全構造質量等の目的関数を最小にするような設計解を求める最適設計問題に関しては、多くの論文が発表されている [1-11]。動的な外乱作用下の最大応答量は、外乱が正弦波等の単純な場合をのぞいて、時刻歴応答解析で求める必要がある。したがって、最大応答量に関する制約条件も、各時刻ごとに与えられなければならない。感度解析法及び Newton-Raphson 法に基づく繰り返し計算による既往の手法を大規模構造物に適用することは、理論上は可能であっても実用的ではない。また、それらの手法は、1つの指定応答量に対応する設計解を求めるためにも多くの計算量を必要とし、種々の指定応答量に対応する設計解の集合を求めることが必要である場合には有効ではない。

中村ら [12-21] は、指定 1 次固有振動数を有するせん断型構造物及び平面骨組の、最適設計解の解析的表現を導くことが可能であることを用いて、指定強震時最大応答層間変位を有するせん断型構造物及び平面骨組の、剛性集合を求める理論を展開した。ここで、入力地震波としては与えられた設計応答スペクトルに適合する地震波の集合を考え、応答量は弾性範囲にとどまるものとし、Square Root of Sum of Square (SRSS) 法を用いて平均最大応答量を評価している。また、その理論では、構造物の規則性及び、強震時最大応答量において 1 次固有モードの成分が大部分をしめることを有効に用いている。しかし、文献 [12-21] では、得られた応答層間変位制約設計解が、何らかの最適設計問題の最適設計解となっている可能性に対する検討はなされていない。一方、立体トラスに対しては、その幾何学的形状の複雑さのため、解析的な理論に基づく手法を展開することは困難であり、大規模立体トラスに対しても有効な手法は、著者らの論文 [22-26] 以外には存在しない。

本章では、まず、設計応答スペクトルに適合する地震波の集合が作用したときの、平均最大応答ひずみに関する制約条件を考慮した、指定強震時応答ひずみを有するトラスの最適設計問題を定式化し、最適性必要条件を導く。ここで、応答評価には Complete Quadratic Combination (CQC) 法 [27,28] を用いる。本節では弾性トラスを考えるため、応答ひずみと応答応力は等価である。次に、最小断面積制限値を有する全応力設計問題としての、強震時応答ひずみ制約設計問題を定式化し、「強震時応答ひずみ制約設計解順序集合」という新しい概念を導入する。その概念に基づき、指定応答ひずみをパラメータとした区分的テイラー展開手法により、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成する理論を展開する。さらに、強震時応答ひずみ制約設計解が、前記最適設計問題の最適設計解となっている可能性について検討する。

†本章の 4.2 節の一部はすでに文献 [22] に発表済みである。また、4.3 節の一部はすでに文献 [25] に発表済みである。

本章で用いる記号の定義を以下に示す。

$\mathbf{A} = \{A_i\}$	部材断面積ベクトル
$\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{A}_i\}$	最小断面積制限値ベクトル
\mathbf{C}_i	ひずみ変位関係を表わす行ベクトル
C_A	地震波の最大加速度
C_D	地震波の最大変位
C_V	地震波の最大速度
e_i^r	Φ_r に対応する第 i 部材のひずみ
f	変位の自由度
g	重力加速度
h	h_r に対する一定値
h_r	r 次減衰定数
\mathbf{I}_v	地震波の入力方向の方向余弦を表わすベクトル
\mathbf{I}_s	重力の作用する方向を表わすベクトル
J^A	$A_i > \bar{A}_i$ が成立する部材の番号の集合
\mathbf{K}	系剛性行列
\mathbf{K}_i^*	系座標に関する、第 i 部材の単位断面積あたりの部材剛性行列
$\mathbf{L} = \{L_i\}$	部材長ベクトル
\mathbf{M}_D	部材質量に関する系コンシステント質量行列
\mathbf{M}_{Di}^*	系座標に関する、第 i 部材の単位断面積あたりの コンシステント質量行列
\mathbf{M}_J	節点集中質量に関する系質量行列
\mathbf{M}_L	部材質量に関する系集中質量行列
\mathbf{M}_{Li}^*	系座標に関する、第 i 部材の単位断面積あたりの集中質量行列
m	部材数
m^A	$\varepsilon_i = \xi \Lambda_i^b$ が成立する部材の数
n	応答評価に用いるモードの数
S_D	設計変位応答スペクトル
\mathbf{u}	静的初期変位ベクトル

α_{pq}	q 次固有円振動数の p 次固有円振動数に対する比
β_r	r 次刺激係数
ε_i	第 i 部材の強震時最大応答ひずみ
ε_i^s	第 i 部材の静的初期ひずみ
ε_i^v	第 i 部材の強震時最大応答ひずみの動的成分
η_{pq}	p 次及び q 次モード間の相関係数
Λ_i	第 i 部材の強震時最大応答ひずみの上限値
Λ_i^b	Λ_i に対する単位量
Ω_r	r 次固有値
Ω_r^0	平板状立体トラスの対称条件を考慮しない r 次固有値
Ω_r^s	平板状立体トラスの対称条件を考慮した r 次固有値
Φ_r	r 次固有モード
ξ	$\{\Lambda_i\}$ を規定するスカラーパラメター
μ_i	最小断面積制約条件に対するラグランジュ乗数
ν_i	応答ひずみ制約条件に対するラグランジュ乗数

4.2 指定強震時応答ひずみを有するトラスの最適設計問題

部材中心線形状及び、支持条件の定められたトラスを考える。節点は完全なピン接合とし、トラスの部材内の曲げ変形は考慮せず、材軸方向の変位を材端変位の 1 次関数で表わす。部材剛性の評価では、自重及び非構造節点集中質量による静的初期軸力にとまなう剛性変化の効果を考慮に入れるのが望ましいが、ここでは、簡単のため考慮しないものとする。本章で展開する理論は、そのような剛性変化を考慮した場合にも拡張できる。

第 i 部材の断面積を A_i とする。トラスは設計変数 A_i の集合 $\{A_i\}$ で完全に決定され、それをベクトル \mathbf{A} で表わす。非常に小さい断面積の部材が存在することをさけるため、各部材に最小断面積制限値 \bar{A}_i を与える。 \bar{A}_i は部材座屈軸力に関する制限等により決定されるべきものである。あらかじめ与えられた強震レベル (レベル 1) の設計変位応答スペクトルを、固有値 Ω の関数として $S_D(\Omega)$ で表わす。後で定式化する最適設計問題では、 $S_D(\Omega)$ に適合する地震波の集合を入力したときの平均最大応答ひずみが、指定された上限値を超えないという制約条件を与える。ここで、最大応答ひずみは弾性限内に存在するものとする。さらに、トラスは静的初期外力により大きく変形しているため、最大応答ひずみの評価の際には、静的初期ひずみも考慮するものとする。

ここで、応答評価にはモーダルアナリシスに基づく Complete Quadratic Combination (CQC) 法 [27,28] を用いるため、まず自由振動の固有値問題を定式化する。系座標に関する系剛性行列、部材質量による系コンシステント質量行列及び節点集中非構造質量による系質量行列を、それぞれ $K(A)$ 、 $M_D(A)$ 及び M_J で表わす。 r 次固有値及び r 次固有モードをそれぞれ $\Omega_r(A)$ 及び $\Phi_r(A)$ で表わすと、自由振動の方程式より次式を得る。

$$K(A)\Phi_r(A) = \Omega_r(A)\{M_D(A) + M_J\}\Phi_r(A) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

ここで、応答評価には n 次モードまで考慮するものとする。 $\Phi_r(A)$ に対応する第 i 部材のひずみを $e_i^r(A)$ とすると、 $e_i^r(A)$ と $\Phi_r(A)$ の関係は、ひずみ変位関係を表わす行ベクトル C_i を用いて

$$e_i^r(A) = C_i\Phi_r(A) \quad (r = 1, 2, \dots, n), \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.2)$$

のように書ける。ここで、 m は部材数である。 $\Phi_r(A)$ の正規化条件を

$$\Phi_r(A)^T\{M(A) + M_J\}\Phi_r(A) = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

で与える。ここで、上添字 T はベクトルの転置を表わす。各節点での 3 方向の変位成分からなる 3 次元ベクトルの大きさが 1 であり、その方向が地震波の入力方向に一致するような、地震波の入力方向の方向余弦を表わすベクトルを I_v とすると、 r 次刺激係数 $\beta_r(A)$ は次式で定められる。

$$\beta_r(A) = \Phi_r(A)^T\{M(A) + M_J\}I_v \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.4)$$

文献 [12-21] では、せん断型構造物及び平面骨組に対しては、近接した固有値を有することがないため Square Root of Sum of Square (SRSS) 法を用いて強震時応答量を評価している。しかし、トラスの固有値は互いに近接する場合が多いので、ここでは CQC 法 [27,28] を用いる。 r 次減衰定数を $h_r(A)$ とすると、 p 次と q 次モード間の相関係数 $\eta_{pq}(A)$ は次式で定義される。

$$\eta_{pq}(A) = \frac{8\sqrt{h_p(A)h_q(A)}\{h_p(A) + \alpha_{pq}(A)h_q(A)\}\alpha_{pq}(A)^{3/2}}{\{1 - \alpha_{pq}(A)^2\}^2 + 4h_p(A)h_q(A)\alpha_{pq}(A)\{1 + \alpha_{pq}(A)^2\} + 4\{h_p(A)^2 + h_q(A)^2\}\alpha_{pq}(A)^2} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5)$$

ここで、 $\alpha_{pq}(A)$ は、 q 次固有円振動数の p 次固有円振動数に対する比であり、

$$\alpha_{pq}(A) = \sqrt{\frac{\Omega_q(A)}{\Omega_p(A)}} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

で与えられる。以上より、第 i 部材の強震時最大応答ひずみの動的成分 $\varepsilon_i^v(\mathbf{A})$ は次式で評価できる。

$$\varepsilon_i^v(\mathbf{A}) = \sqrt{\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \{S_D(\Omega_p(\mathbf{A}))\beta_p(\mathbf{A})C_i\Phi_p(\mathbf{A})\}\eta_{pq}(\mathbf{A})\{S_D(\Omega_q(\mathbf{A}))\beta_q(\mathbf{A})C_i\Phi_q(\mathbf{A})\}} \quad (4.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m)$$

部材質量を集中質量で表わしたときの、系座標に関する質量行列を $\mathbf{M}_L(\mathbf{A})$ とする。各節点における重力の作用する方向に対応する成分は 1 あるいは -1 で、他の成分は 0 であるようなベクトルを \mathbf{I}_s とすると、静的初期変位ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{A})$ を定める剛性方程式は、

$$\mathbf{K}(\mathbf{A})\mathbf{u}(\mathbf{A}) = g\{\mathbf{M}_L(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J\}\mathbf{I}_s \quad (4.8)$$

のように書ける。ここで、 g は重力加速度である。また、 $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$ を用いて自重を表わすことはできないため、新たに $\mathbf{M}_L(\mathbf{A})$ を定義して用いた。第 i 部材の静的初期ひずみ (強震時最大応答ひずみの静的成分) $\varepsilon_i^s(\mathbf{A})$ は $\mathbf{u}(\mathbf{A})$ を用いて

$$\varepsilon_i^s(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_i\mathbf{u}(\mathbf{A}) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.9)$$

のように表わすことができ、第 i 部材の強震時最大応答ひずみ $\varepsilon_i(\mathbf{A})$ は、非負の値をもつ $\varepsilon_i^v(\mathbf{A})$ と、 $\varepsilon_i^s(\mathbf{A})$ の絶対値の和として、

$$\varepsilon_i(\mathbf{A}) = \varepsilon_i^v(\mathbf{A}) + |\varepsilon_i^s(\mathbf{A})| \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.10)$$

で定義できる。

設計者により指定された、第 i 部材の強震時最大応答ひずみの上限値を Λ_i とする。以上より、指定強震時応答ひずみを有するトラスの最適設計問題を、次のように定式化することができる。

[Problem ODPES]

強震時応答ひずみ制約条件

$$\varepsilon_i(\mathbf{A}) \leq \Lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.11)$$

及び、最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.12)$$

の下で、全部材体積

$$V(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m (A_i L_i) \quad (4.13)$$

を最小にするような最適設計解を求めよ。

ここで、 L_i は第 i 部材の部材長である。Problem ODPES に対する局所最適性必要条件 (Kuhn-Tucker 条件) は次のようになる。

$$L_i + \sum_{j=1}^m \nu_j \frac{\partial \varepsilon_j(\mathbf{A})}{\partial A_i} - \mu_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.14)$$

$$\nu_i \{\varepsilon_i(\mathbf{A}) - \Lambda_i\} = 0, \quad \nu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.15)$$

$$\mu_i (\bar{A}_i - A_i) = 0, \quad \mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.16)$$

ここで、 ν_i 及び μ_i はラグランジュ乗数である。

4.3 強震時応答ひずみ制約設計解順序集合生成法

Problem ODPES は 1 つの非線形計画問題であり、理論上は数理計画法の何らかのアルゴリズムを用いて解くことができる。しかし、大規模トラスに対してそれらのアルゴリズムを直接適用することは、実質上不可能である。ところで、設計者にとっては Problem ODPES の最適設計解が得られなくても、強震時最大応答ひずみ $\varepsilon_i(\mathbf{A})$ が上限値 Λ_i を超えないような、「強震時応答ひずみ制約設計解」が得られたならば、実用上十分である場合が多い。せん断型構造物では、一般化ひずみとしての最大応答層間変位が、全層において指定値に一致するような設計解を求めることにより、直観的に最適な設計解を得ることができる。しかし、不静定トラスでは、部材数が変位の自由度より大きいため、全部材の最大応答ひずみを指定値に一致させることはできない。したがって、 $A_i > \bar{A}_i$ である部材では $\varepsilon_i(\mathbf{A})$ は Λ_i に一致しなければならないが、 $A_i = \bar{A}_i$ である部材では、 A_i をそれ以上減少させることができないため、 $\varepsilon_i(\mathbf{A}) \leq \Lambda_i$ であれば良いものとする。以上より、「強震時応答ひずみ制約設計問題」を次のように定式化する。

[Problem ESCD]

強震時応答ひずみの上限値 $\{\Lambda_i\}$ が与えられたとき、次の条件を満たす
強震時応答ひずみ制約設計解 $\tilde{\mathbf{A}}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \bar{A}_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \varepsilon_i(\tilde{\mathbf{A}}) &= \Lambda_i \\ \bar{A}_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \varepsilon_i(\tilde{\mathbf{A}}) &\leq \Lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.17a, b)$$

設計者にとって、 $\{\Lambda_i\}$ を何の情報もなしに定めるのは困難であるから、種々の $\{\Lambda_i\}$ の組に対する強震時応答ひずみ制約設計解が得られたならば、それらの結果に基づき望ましい $\{\Lambda_i\}$ を逆に決定することができる。いま、 $\{\Lambda_i\}$ が基準量 $\{\Lambda_i^b\}$ 及びスカラーパラメーター ξ を用いて

$$\Lambda_i = \xi \Lambda_i^b \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.18)$$

のように定められるものとする。このとき、強震時応答制約設計解 $\hat{\mathbf{A}}$ は ξ を与えることにより決定されるため、 ξ の関数と考えることができ、それを $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ と書く。 ξ は全順序関係の成立する実数値集合に属するため、 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ を「強震時応答ひずみ制約設計解順序集合」と定義する。 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ に対応する強震時応答ひずみも

$$\hat{\varepsilon}_i(\xi) = \varepsilon_i(\hat{\mathbf{A}}(\xi)) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.19)$$

のように表わす。以上より、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ を求める問題を、次のように定式化することができる。

[Problem OESCD]

強震時応答ひずみの上限値の順序集合 $\{\Lambda_i\} = \xi\{\Lambda_i^b\}$ が与えられたとき、

以下の条件を満たす強震時応答ひずみ制約設計解順序集合 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \hat{A}_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \hat{\varepsilon}_i(\xi) &= \xi \Lambda_i^b \\ \hat{A}_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \hat{\varepsilon}_i(\xi) &\leq \xi \Lambda_i^b \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.20a, b)$$

$\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ に対応する r 次固有値、 r 次固有モード、静的初期変位等も ξ の関数と考えることができ、

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_r(\xi) &= \Omega_r(\hat{\mathbf{A}}(\xi)) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ \hat{\Phi}_r(\xi) &= \Phi_r(\hat{\mathbf{A}}(\xi)) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi) &= \mathbf{u}(\hat{\mathbf{A}}(\xi)) \end{aligned} \quad (4.21a \sim c)$$

のように上添字 $\hat{}$ を用いて表わす。

これらの関数は、必要な階数まで ξ で連続微分可能であるものとする。いま、 ξ のある値 ξ_0 に対応する強震時応答ひずみ制約設計解が、何らかの方法で得られていたならば、 ξ_0 の近傍の ξ の値に対応する $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ 及び $\hat{\Omega}_r(\xi)$ は、次のテイラー展開式で近似できる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\xi) &= \hat{\mathbf{A}}(\xi_0) + \hat{\mathbf{A}}'(\xi_0)(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{A}}''(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 + \dots \\ \hat{\Omega}_r(\xi) &= \hat{\Omega}_r(\xi_0) + \hat{\Omega}_r'(\xi_0)(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2}\hat{\Omega}_r''(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2 + \dots \quad (r = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.22a, b)$$

ここで、上添字 $'$ は ξ に関する微分を表わす。 $\hat{\mathbf{u}}(\xi)$ 、 $\hat{\varepsilon}_i(\xi)$ 等についても同様の表現を得ることができる。したがって、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を求める問題は、 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ 、 $\hat{\Omega}_r(\xi)$ 等の ξ に関する微分係数を求める問題に帰せられる。

$K(A)$, $M_D(A)$ 及び $M_L(A)$ の各成分は A_i の線形関数であるから、次式で定義される K_i^* , M_{Di}^* 及び M_{Li}^* は定数行列である。

$$\begin{aligned} K_i^* &= \frac{\partial K(A)}{\partial A_i} \\ M_{Di}^* &= \frac{\partial M_D(A)}{\partial A_i} \\ M_{Li}^* &= \frac{\partial M_L(A)}{\partial A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.23a \sim c)$$

すなわち、行列 K_i^* 及び M_{Di}^* は、ともに f 行 f 列の行列であり、第 i 部材に関する項以外は全て 0 であるような、系座標に関する単位断面積あたりの部材剛性行列及び部材質量行列である。このとき、 $\hat{K}(\xi)$, $\hat{M}_D(\xi)$ 及び $\hat{M}_L(\xi)$ は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \hat{K}(\xi) &= \sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i(\xi) K_i^*\} \\ \hat{M}_D(\xi) &= \sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i(\xi) M_{Di}^*\} \\ \hat{M}_L(\xi) &= \sum_{i=1}^m \{\hat{A}_i(\xi) M_{Li}^*\} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.24a \sim c)$$

(4.1), (4.3) 及び (4.4) の両辺を ξ で微分すると、次の各式を得る。

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i' K_i^*) \right\} \hat{\Phi}_r + \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i K_i^*) \right\} \hat{\Phi}_r' &= \hat{\Omega}_r' \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i M_{Di}^*) + M_J \right\} \hat{\Phi}_r \\ &+ \hat{\Omega}_r \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i M_{Di}^*) + M_J \right\} \hat{\Phi}_r' + \hat{\Omega}_r \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i' M_{Di}^*) \right\} \hat{\Phi}_r \end{aligned} \quad (4.25)$$

$(r = 1, 2, \dots, n)$

$$2\hat{\Phi}_r^T \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i M_{Di}^*) + M_J \right\} \hat{\Phi}_r' + \hat{\Phi}_r^T \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i' M_{Di}^*) \right\} \hat{\Phi}_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.26)$$

$$\beta_r' = \hat{\Phi}_r^T \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i M_{Di}^*) + M_J \right\} I + \hat{\Phi}_r^T \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i' M_{Di}^*) \right\} I_v \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.27)$$

ここで、簡単のため引数 ξ は省略した。

r 次減衰定数 h_r は、振動数比例型レイリー減衰等で定めることも可能である。このとき、 h_1 に対して何らかの値を与える必要がある。建築構造物の構造設計では、何の理論的根拠もなしに、 h_1 に対して 1 次固有値 (1 次固有振動数) にかかわらず、一定値を与えることが多い。しかし、 ξ に関するテイラー展開手法で強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成するとき、 $\hat{\Omega}_1(\xi)$ は ξ の変化にともない変化する。したがって、 \hat{h}_1 を固定することは、固有値が等しくてもそれが 1 次であるか 2 次であるかによって、減衰定数が異なるという場合も生じ、不合理である。そこで、本章では、手法の簡明な説明のためにも h_r には全モードに対して一定値 h を与えるものとする。ま

た、後の例題で、強震時最大応答ひずみに対する減衰定数の影響が小さいことを例証する。以上より、(4.5) は次のような簡単な形に帰せられる。

$$\hat{\eta}_{pq} = \frac{8h^2(1 + \hat{\alpha}_{pq})\hat{\alpha}_{pq}^{3/2}}{(1 - \hat{\alpha}_{pq}^2)^2 + 4h^2\hat{\alpha}_{pq}(1 + \hat{\alpha}_{pq}^2) + 8h^2\hat{\alpha}_{pq}^2} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \quad (4.28)$$

(4.6) の両辺を 2 乗した式及び (4.28) の両辺を ξ で微分すると、次の各式を得る。

$$2\hat{\alpha}_{pq}\hat{\alpha}'_{pq}\hat{\Omega}_p + \hat{\alpha}_{pq}^2\hat{\Omega}'_p = \hat{\Omega}'_q \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & \hat{\eta}'_{pq} \{ (1 - \hat{\alpha}_{pq}^2)^2 + 4h^2\hat{\alpha}_{pq}(1 + \hat{\alpha}_{pq}^2) + 8h^2\hat{\alpha}_{pq}^2 \} \\ & + \hat{\eta}_{pq} \{ -4\hat{\alpha}_{pq}(1 - \hat{\alpha}_{pq}^2) + 4h^2(1 + \hat{\alpha}_{pq}^2) + 8h^2\hat{\alpha}_{pq}^2 + 16h^2\hat{\alpha}_{pq} \} \hat{\alpha}'_{pq} \\ & = \{ 8h^2\hat{\alpha}_{pq}^{3/2} + 12h^2(1 + \hat{\alpha}_{pq})\hat{\alpha}_{pq}^{1/2} \} \hat{\alpha}'_{pq} \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.30)$$

変位応答スペクトルに対しては、新しい関数

$$\hat{S}_{Dr}(\xi) = S_D(\hat{\Omega}_r(\xi)) \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.31)$$

を導入すると、

$$\hat{S}'_{Dr} = \frac{\partial S_D}{\partial \Omega_r} \hat{\Omega}'_r \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (4.32)$$

を得る。さらに、(4.7) の両辺を 2 乗した式及び (4.8) ~ (4.10) の両辺を ξ で微分することにより、次の各式を得る。

$$\begin{aligned} 2\hat{\varepsilon}_i^{v'}\hat{\varepsilon}_i^v &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \left[(\hat{S}_{Dp}\hat{\beta}_p C_i \hat{\Phi}_p) \hat{\eta}'_{pq} (\hat{S}_{Dq}\hat{\beta}_q C_i \hat{\Phi}_q) \right. \\ &+ \{ (\hat{S}'_{Dp}\hat{\beta}_p C_i \hat{\Phi}_p + \hat{S}_{Dp}\hat{\beta}'_p C_i \hat{\Phi}_p + \hat{S}_{Dp}\hat{\beta}_p C_i \hat{\Phi}'_p) \hat{\eta}_{pq} (\hat{S}_{Dq}\hat{\beta}_q C_i \hat{\Phi}_q) \} \\ &+ \{ (\hat{S}_{Dp}\hat{\beta}_p C_i \hat{\Phi}_p) \hat{\eta}_{pq} (\hat{S}'_{Dq}\hat{\beta}_q C_i \hat{\Phi}_q + \hat{S}_{Dq}\hat{\beta}'_q C_i \hat{\Phi}_q + \hat{S}_{Dq}\hat{\beta}_q C_i \hat{\Phi}'_q) \} \Big] \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}'_i K_i^*) \right\} \hat{u} + \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}_i K_i^*) \right\} \hat{u}' = g \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}'_i M_{Li}^*) \right\} I_s \quad (4.34)$$

$$\hat{\varepsilon}_i^{s'} = C_i \hat{u}' \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i^s > 0 \quad \text{のとき} \quad \hat{\varepsilon}_i' &= \hat{\varepsilon}_i^{v'} + \hat{\varepsilon}_i^{s'} \\ \hat{\varepsilon}_i^s < 0 \quad \text{のとき} \quad \hat{\varepsilon}_i' &= \hat{\varepsilon}_i^{v'} - \hat{\varepsilon}_i^{s'} \end{aligned} \quad (4.36a, b)$$

$\hat{\varepsilon}_i^s = 0$ の場合には、後で示す区分的テイラー展開手法において、前ステップの $\hat{\varepsilon}_i^{s'}$ が正の場合には (4.36a)、負の場合には (4.36b) を適用する。また、Problem OESCD に対する制約条件 (4.10a, b) より、明らかに

$$\begin{aligned} \hat{A}_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \hat{\varepsilon}_i' &= \Lambda_i^b \\ \hat{A}_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad \hat{A}_i' &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (4.37a, b)$$

表 4.1 微分係数を求めるための式及び変数の対応

式	変数	数
(4.37)	\hat{A}_i	m^A
(4.33)	$\hat{\varepsilon}_i^v$	m^A
(4.35)	$\hat{\varepsilon}_i^s$	m^A
(4.36)	$\hat{\varepsilon}_i$	m^A
(4.26)	$\hat{\Omega}_r$	n
(4.27)	$\hat{\beta}_r$	n
(4.32)	\hat{S}_{Dr}	n
(4.25)	$\hat{\Phi}_r$	$n \times f$
(4.34)	\hat{u}	f
(4.30)	$\hat{\eta}_{pq}$	n^2
(4.29)	$\hat{\alpha}_{pq}$	n^2
		$2n^2 + f + nf + 3n + 4m^A$

が成立する。(4.25) ~ (4.27), (4.29), (4.30) 及び (4.32) ~ (4.37a, b) は, 必要な階数まで ξ で微分することができる。いま, ξ のある値に対する強震時応答ひずみ制約設計解が得られているものとする。このとき, 変位の自由度を f , $A_i > \bar{A}_i$ すなわち $\varepsilon_i = \xi \Lambda_i^b$ が成立する部材の数を m^A とすると, $(2n^2 + f + nf + 3n + 4m^A)$ 元の連立 1 次方程式を解くことにより, 各変数の ξ に関する微分係数を求めることができ, (4.22a, b) のテイラー展開式が得られる。変数と式の間を関係を表 4.1 に示す。

全部材の断面積が, その最小制限値で定まるような設計解 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ を考え, 全部材に対して $\varepsilon_i(\bar{\mathbf{A}})/\Lambda_i^b$ を計算し, その最大値を $\bar{\xi}$ とする。このとき, 明らかに設計解 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ は, $\xi = \bar{\xi}$ としたときの Problem OESCD に対する制約条件 (4.10a, b) を満たすため, $\xi = \bar{\xi}$ に対する強震時応答ひずみ制約設計解である。したがって, 以下のようにして強震時応答ひずみ制約設計解の順序集合を生成することができる。

[Step 1] 全部材の断面積が, その最小制限値で定まるような設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ を考える。静的解析を行ない $\varepsilon_i^s(\bar{\mathbf{A}})$ を求める。さらに, 固有値解析を行ない, CQC 法を用いて $\varepsilon_i^v(\bar{\mathbf{A}})$ を求める。全部材に対して $\varepsilon_i(\bar{\mathbf{A}})/\Lambda_i^b$ を計算し, その値が最大となっている部材を第 1 部材とし, その最大値を $\bar{\xi}$ とする。このとき, 設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ は $\xi = \bar{\xi}$ に対応する Problem ORSCD の解である。

[Step 2] (4.10a, b) より明らかに, ξ を $\bar{\xi}$ から減少させると ε_1 が減少しなければならず, 第 1 部材の断面積がその最小制限値から増加することがわかる。(4.37a, b) より, 第 1 部材に

対しては $\varepsilon_i^b = \Lambda_i^b$ ，他の部材に対しては $\hat{A}_i' = 0$ であるから， $(2n^2 + f + nf + 3n + 4)$ 元の $B\mathbf{x}' = \mathbf{b}_1$ の形の連立 1 次方程式を解くことにより，各変数の 1 階微分係数を求めることができる。ここで， B 及び \mathbf{b}_1 は，それぞれ既知の行列及びベクトルであり， \mathbf{x}' は未知の 1 階微分係数のベクトルである。1 階微分係数が得られると， $B\mathbf{x}'' = \mathbf{b}_2$ の形の連立 1 次方程式を解いて，2 階微分係数を求めることができる。ここで， \mathbf{b}_2 及び \mathbf{x}'' は，それぞれ既知のベクトル及び未知の 2 階微分係数のベクトルであり，行列 B は 1 階微分係数を求める式の行列と同一である。したがって，一度 B の LU 分解を行なっておけば，高階の微分係数まで容易に求めることができる。

[Step 3] 第 1 部材以外の部材では $\hat{A}_i' = 0$ であり，[Step 2] で得られた各変数の ξ に関する微分係数を用いて，次のテイラー展開式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(\xi) &= \bar{A}_1 + \hat{A}_1'(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2}\hat{A}_1''(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots \\ \hat{\Omega}_r(\xi) &= \hat{\Omega}_r(\bar{\xi}) + \hat{\Omega}_r'(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2}\hat{\Omega}_r''(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ \hat{\Phi}_r(\xi) &= \hat{\Phi}_r(\bar{\xi}) + \hat{\Phi}_r'(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}_r''(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots \quad (r = 1, 2, \dots, n) \\ \hat{\mathbf{u}}(\xi) &= \hat{\mathbf{u}}(\bar{\xi}) + \hat{\mathbf{u}}'(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi}) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}''(\bar{\xi})(\xi - \bar{\xi})^2 + \cdots\end{aligned}\quad (4.38a \sim d)$$

$\hat{\varepsilon}_i^s$ ， $\hat{\varepsilon}_i^v$ ， $\hat{\varepsilon}_i$ ， $\hat{\beta}_r$ ， \hat{S}_{Dr} ， $\hat{\eta}_{pq}$ 及び $\hat{\alpha}_{pq}$ に対しても同様のテイラー展開式を得ることができるが，誤差を少なくするため，これらの値は (4.38a ~ d) で得られる値を (4.4)，(4.6)，(4.7)，(4.9)，(4.10)，(4.28) 及び (4.31) に代入して求める。

[Step 4] ξ を減少させ，次の条件の 1 つが満たされると [Step 2] へもどり，連立 1 次方程式を再構成して微分係数を修正する。

- TPC 1 $\hat{\varepsilon}_i < \xi\Lambda_i^b$ であった部材で， $\hat{\varepsilon}_i$ が $\xi\Lambda_i^b$ に一致する。
- TPC 2 \hat{S}_{Dr}' の値が不連続に変化する。
- TPC 3 $\hat{\varepsilon}_i = \xi\Lambda_i^b$ である部材で， $\hat{\varepsilon}_i^s = 0$ が成立する。
- TPC 4 $\hat{A}_i > \bar{A}_i$ であった部材で， \hat{A}_i が \bar{A}_i に一致する。
- TPC 5 1 つの区間での ξ の減少量が，あらかじめ定められた上限値 $\Delta\xi$ に一致する。

以上のテイラー展開手法を用いて得られる強震時応答ひずみ制約設計解は，Problem ESCD に対する条件 (4.74a, b) を満たす設計解である。ところで，(4.74a, b) を満たす設計解は，明らかに最適設計問題 Problem ODPES に対する制約条件 (4.11) 及び (4.12) を満たすから，強震時応答ひずみ制約設計解は，Problem ODPES の許容設計解である。強震時応答ひずみ制約設計解が Problem ODPES の最適設計解となっている可能性については，最適性条件 (4.14) ~ (4.16) を用いて以下のように検定することができる。

$\hat{A}_i > \bar{A}_i$ が成立する部材の集合を J^A とすると，(4.74a, b) より $\varepsilon_i = \Lambda_i$ ($i \in J^A$) が成立する。このとき (4.15) 及び (4.16) より， J^A に含まれる部材に対して $\mu_i = 0$ が成立し， J^A

に含まれない部材に対しては、 $\varepsilon_i < \Lambda_i$ であるから、(4.15) より $\nu_i = 0$ が成立しなければならない。ゆえに、 $\mu_i = 0$ ($i \in J^A$) 及び $\nu_i = 0$ ($i \notin J^A$) を J^A に含まれる部材に対する (4.14) に代入することにより、 ν_i ($i \in J^A$) を未知数とする m^A 元連立 1 次方程式を構成することができる。ここで、 $\frac{\partial \varepsilon_j}{\partial A_i}$ は通常の設計感度解析の手法 [1] を用いて求めることができ、その詳細はここでは省略する。 J^A に含まれない部材に対しては $\nu_i = 0$ が成り立つから、すでに得られている ν_i ($i \in J^A$) 及び $\nu_i = 0$ ($i \notin J^A$) を J^A に含まれない部材に対する (4.14) に代入することにより、 μ_i ($i \notin J^A$) を計算することができる。以上より得られる ν_i ($i \in J^A$) 及び μ_i ($i \notin J^A$) が全て非負であれば、その強震時応答ひずみ制約設計解は、Problem OD PES の局所最適設計解である [29,30]。すなわち、上記の区分的テイラー展開手法を用いて、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し、得られた設計解が最適設計解であることを検定することが可能である。

4.4 例題

強震時応答ひずみの上限値をパラメーターとした、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合生成法の有効性を明らかにするため、まず 480 部材平板状立体トラスの例題を示す。さらに、504 部材円筒状立体トラスに対して強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し、Problem OD PES の最適性必要条件に関する検定を行なう。これらの例題で、地震波の入力方向は鉛直方向とする。また、応答評価には 4 次モードまで採用する。

設計応答スペクトルには、図 4.1 のような文献 [31] の応答スペクトルを用いた。この応答スペクトルは、固有値 Ω の関数として次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} \leq \Omega \quad \text{のとき} \quad & S_D(\Omega) = S_D^{(1)}(\Omega) = C_A/\Omega \\
 \Omega^{(2)} \leq \Omega < \Omega^{(1)} \quad \text{のとき} \quad & S_D(\Omega) = S_D^{(2)}(\Omega) = 16.2C_A\{3.21 - 0.68 \ln(100h)\}\Omega^{-1.36} \\
 \Omega^{(3)} \leq \Omega < \Omega^{(2)} \quad \text{のとき} \quad & S_D(\Omega) = S_D^{(3)}(\Omega) = C_A\{3.21 - 0.68 \ln(100h)\}/\Omega \\
 \Omega^{(4)} \leq \Omega < \Omega^{(3)} \quad \text{のとき} \quad & S_D(\Omega) = S_D^{(4)}(\Omega) = C_V\{2.31 - 0.41 \ln(100h)\}/\sqrt{\Omega} \\
 \Omega < \Omega^{(4)} \quad \text{のとき} \quad & S_D(\Omega) = S_D^{(5)}(\Omega) = C_D\{1.82 - 0.27 \ln(100h)\} \quad (4.39a \sim e)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\Omega^{(1)}$ 、 $\Omega^{(2)}$ 、 $\Omega^{(3)}$ 及び $\Omega^{(4)}$ は

$$\begin{aligned}
 S_D^{(1)}(\Omega^{(1)}) &= S_D^{(2)}(\Omega^{(1)}) \\
 S_D^{(2)}(\Omega^{(2)}) &= S_D^{(3)}(\Omega^{(2)}) \\
 S_D^{(3)}(\Omega^{(3)}) &= S_D^{(4)}(\Omega^{(3)}) \\
 S_D^{(4)}(\Omega^{(4)}) &= S_D^{(5)}(\Omega^{(4)}) \quad (4.40a \sim d)
 \end{aligned}$$

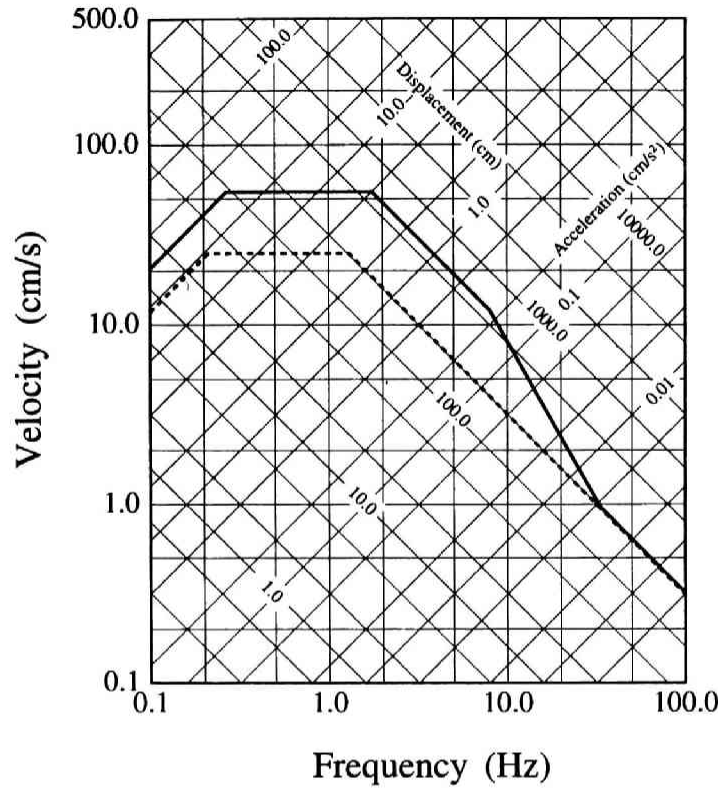


図 4.1 設計用応答スペクトル [31]

で定義され、 C_A 、 C_V 及び C_D は、それぞれ地震波の最大加速度、最大速度及び最大変位を表わすパラメータである。図 4.1 は、水平方向地震波に対して通常用いられるパラメータ値 $C_A = 201.0 \text{ cm/s}^2$ 、 $C_V = 25.0 \text{ cm/s}$ 、 $C_D = 18.75 \text{ cm}$ に対応するものであり、ここでは上下方向地震波を考慮するため、

$$C_A = 134.0 \text{ cm/s}^2$$

$$C_V = 16.7 \text{ cm/s}$$

$$C_D = 12.5 \text{ cm} \quad (4.41a \sim c)$$

とする。水平方向地震波に対する応答スペクトルを単にスケールリングすることにより上下方向地震動に適用することは、理論上正当であるとはいえない。しかし、本例題の目的は、本章で提示した手法の有効性を示すことにあり、本手法は応答スペクトルの形状に依存しないため、ここでは上記スペクトルを用いるものとする。

トラスの材料は、単位体積あたり質量 $7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、弾性係数 205.8 GPa の鋼材であり、重力加速度 g は 980.0 cm/s^2 である。 Λ_i^b には全部材に対して一定値 1 を与える。したがって、 ξ は強震時最大応答ひずみの、全ての部材にわたっての最大値を表わすことになる。減衰定数 h は、全ての設計解の全ての固有モードに対して 0.02 とした。また、 $\Delta\xi$ は各区間の始点の ξ の値の 2% とする。

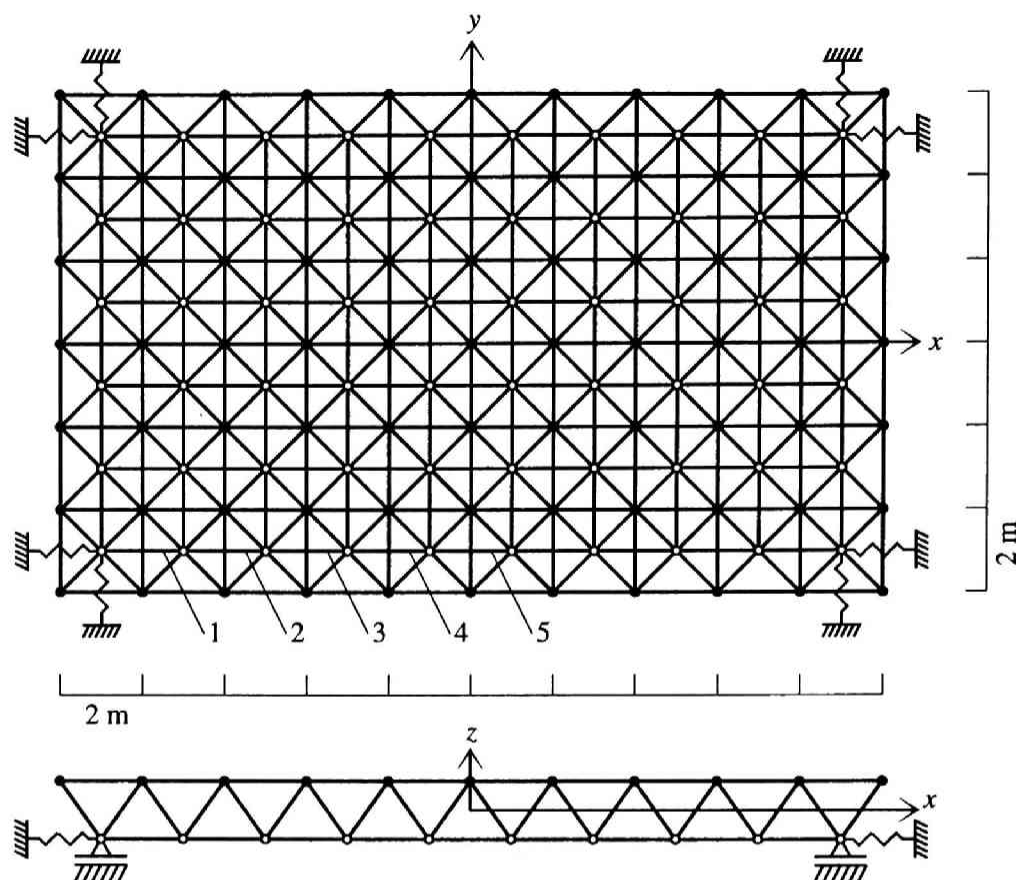


図 4.2 480 部材平板状立体トラス

480 部材平板状立体トラスの応答ひずみ制約設計解順序集合

図 4.2 のような，480 部材平板状立体トラスに対して，強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成した。支点に接続するバネは，柱等の支持構造物をモデル化したものである。したがって，その伸び剛性はあらかじめ与えられるものとし，ここでは 2.88×10^4 N/m とする。また，上層節点に 208.0 kg (4 辺では 104.0 kg，4 隅では 52.0 kg) の非構造集中質量を与える。最小断面積制限値は全部材に対して一定の 1.128 cm^2 とする。上下方向地震波に対しては， xz 平面あるいは yz 平面に関して逆対称なモードに対する刺激係数は 0 となるため， xz 平面及び yz 平面において変形の対称条件を導入し，全体の 1/4 の部分に対してテイラー展開を行なった。 ξ を全部材の断面積が最小断面積制限値に一致する初期設計解での値 $\bar{\xi}$ から減少させ，実用上意味のある ξ の値で現実的な断面積分布の設計解を得るのが望ましいため， $\bar{\xi}$ はかなり大きい値をとることになる。この例では， $\bar{\xi}$ は 2.0828×10^{-3} である。初期設計解において，非構造集中質量の合計 1.2480×10^4 kg に対して，全部材質量は 851.14 kg である。

$\xi = 7.5484 \times 10^{-4}$ ， 4.3527×10^{-4} ， 2.8711×10^{-4} 及び 2.2308×10^{-4} のときの応答ひずみ制約設計解における部材断面積を図 4.3(a ~ d) に示す。これらの図は，部材幅が断面積に比例

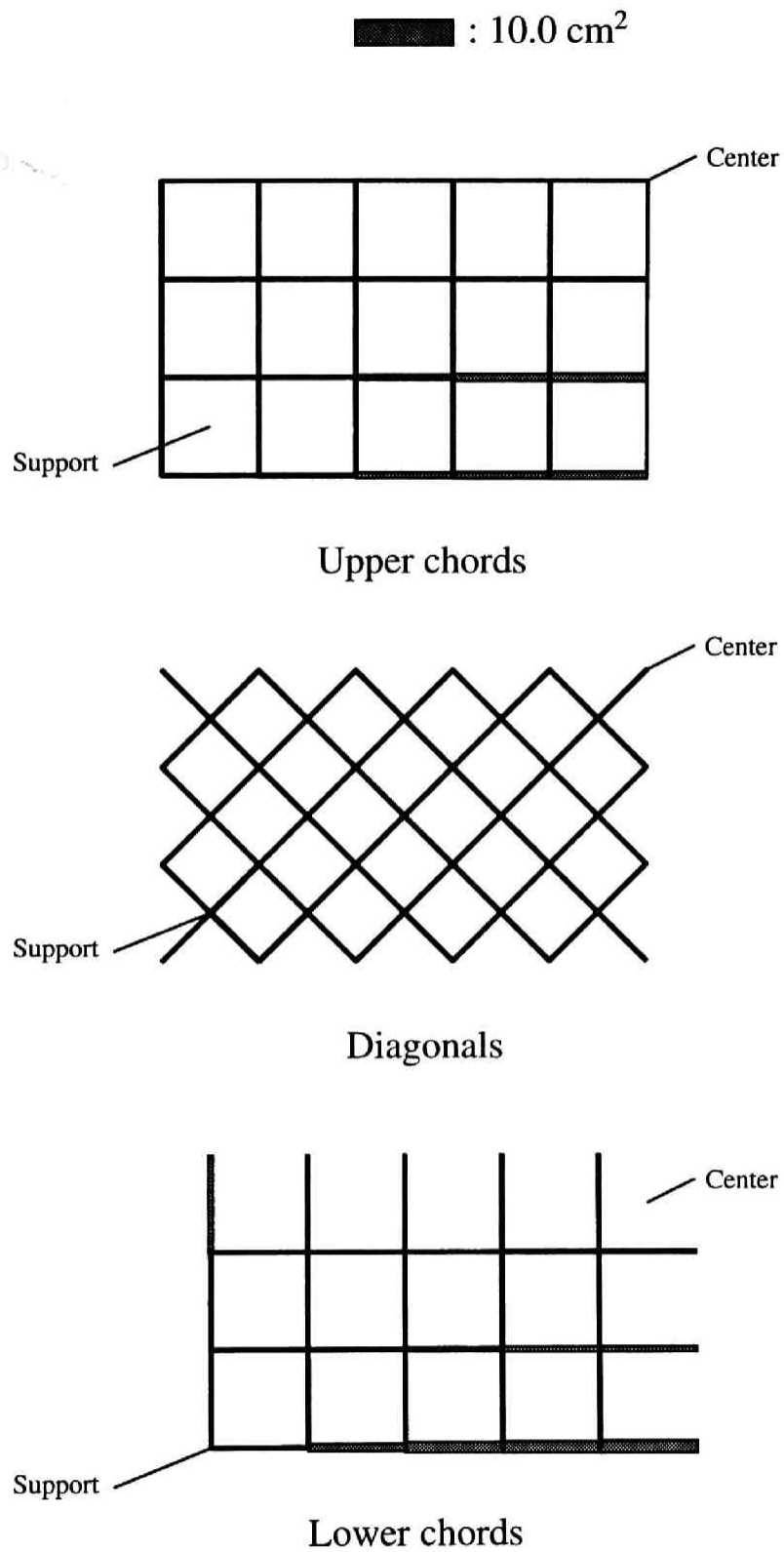


図 4.3(a) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 7.5484 \times 10^{-4}$ に対する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

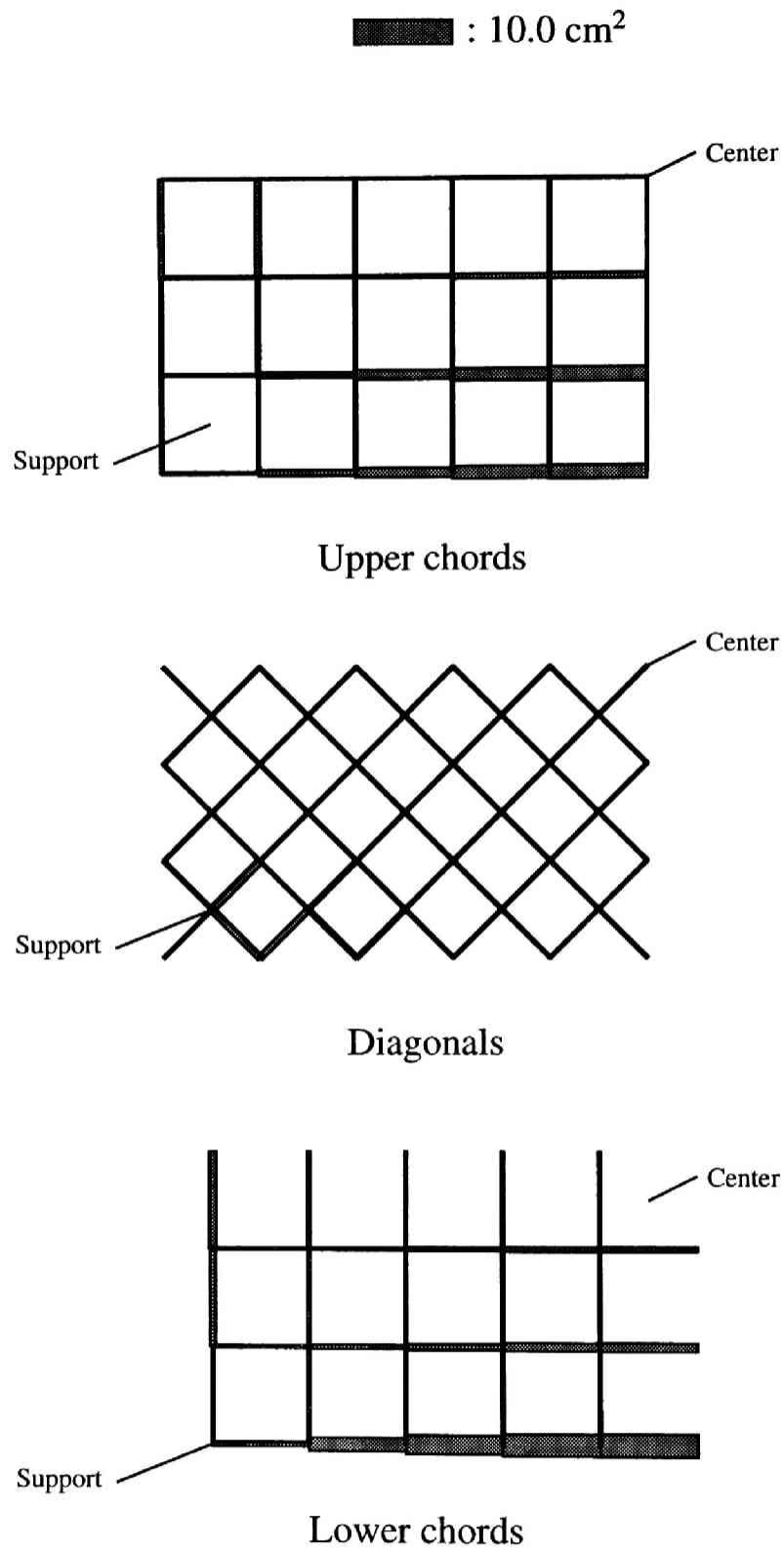


図 4.3(b) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

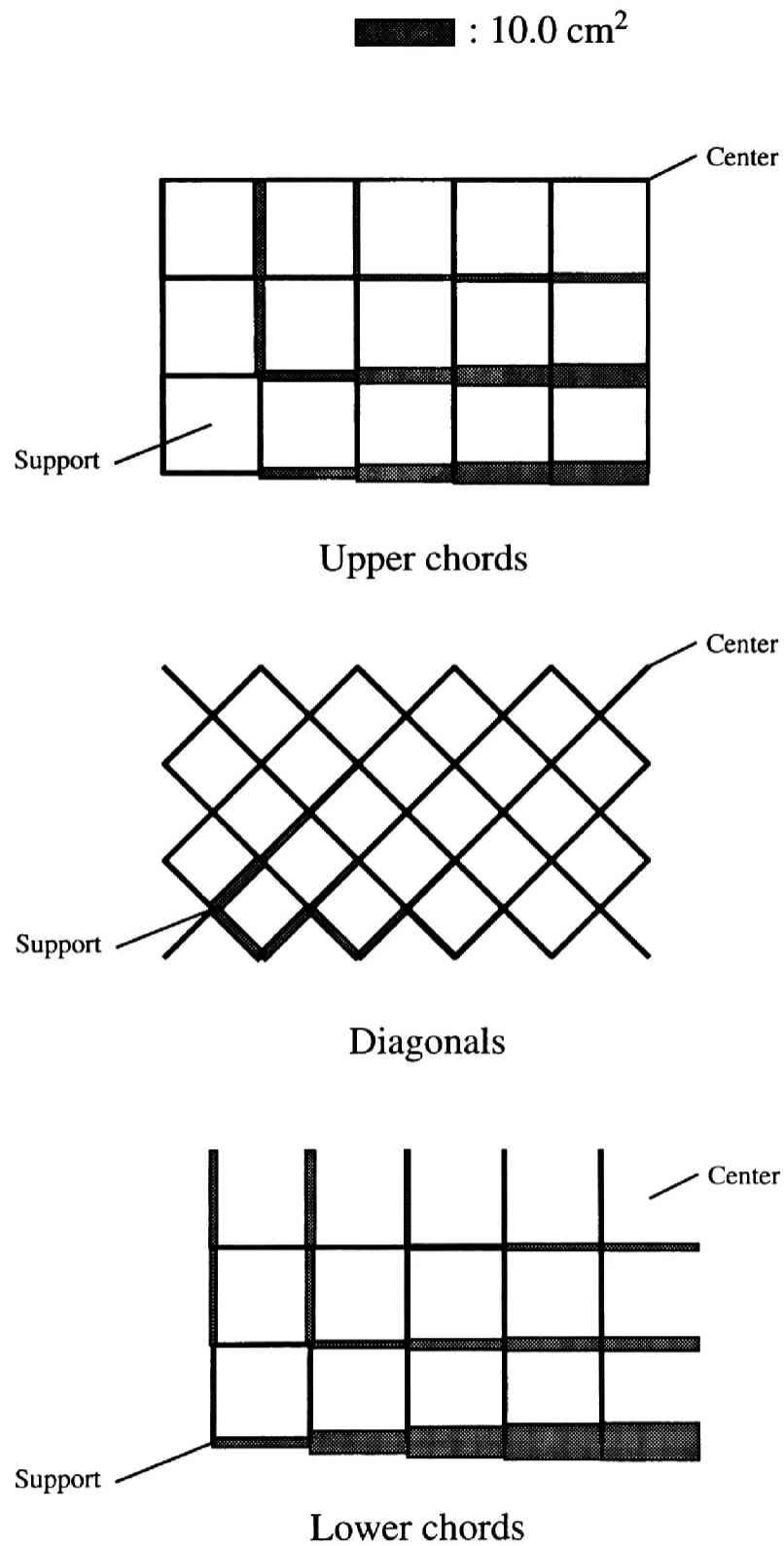


図 4.3(c) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 2.8711 \times 10^{-4}$ に対する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

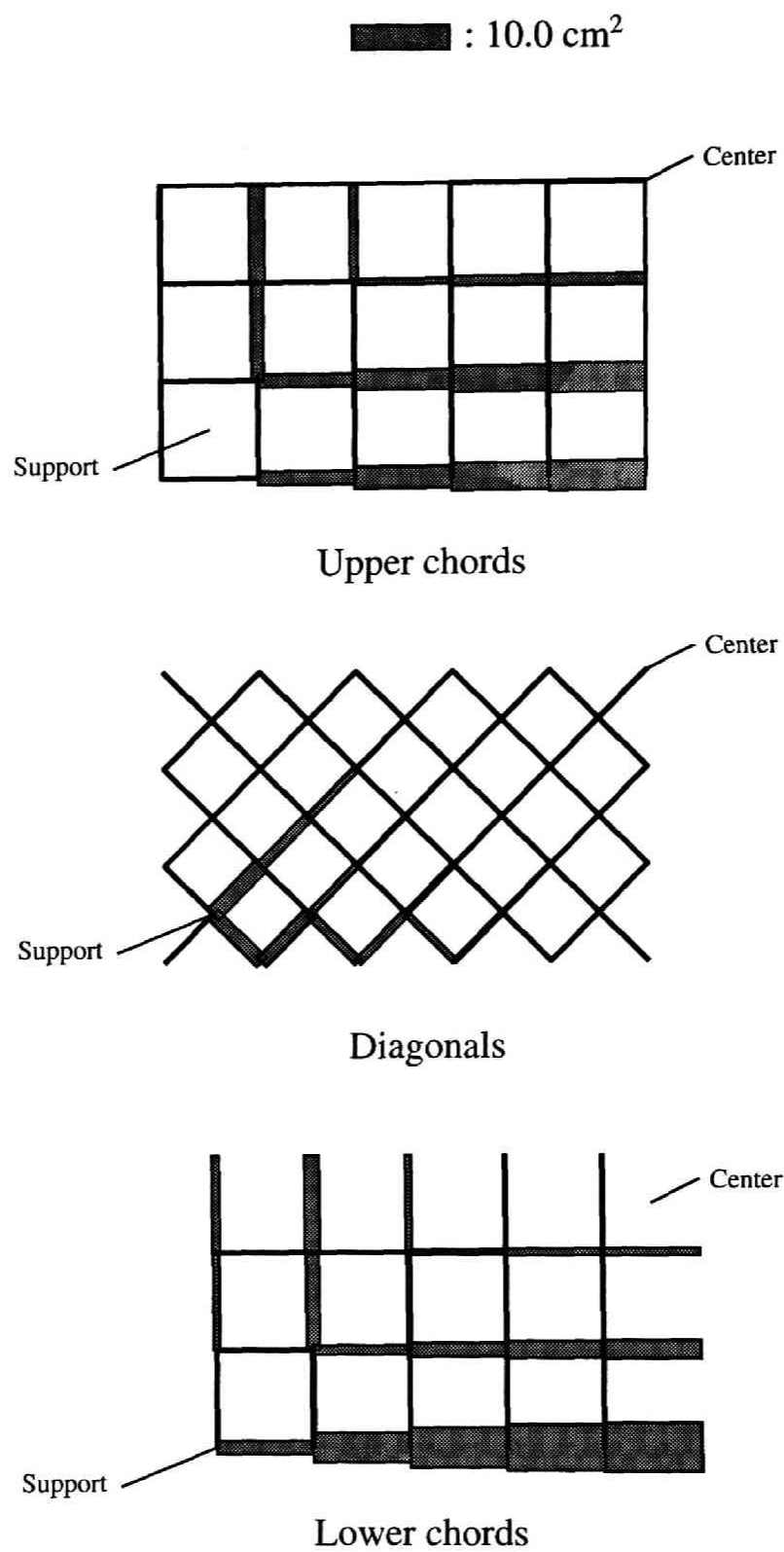


図 4.3(d) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 2.2308 \times 10^{-4}$ に対する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

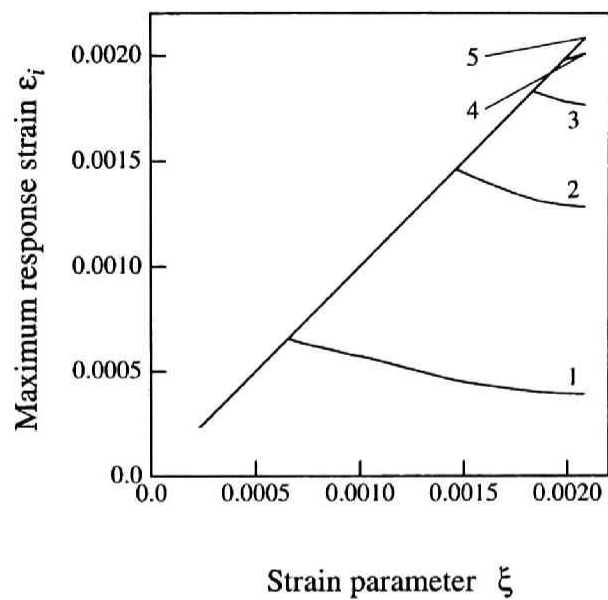


図 4.4 480 部材平板状立体トラスの強震時応答ひずみ制約設計解
順序集合における ξ と強震時最大応答ひずみの関係

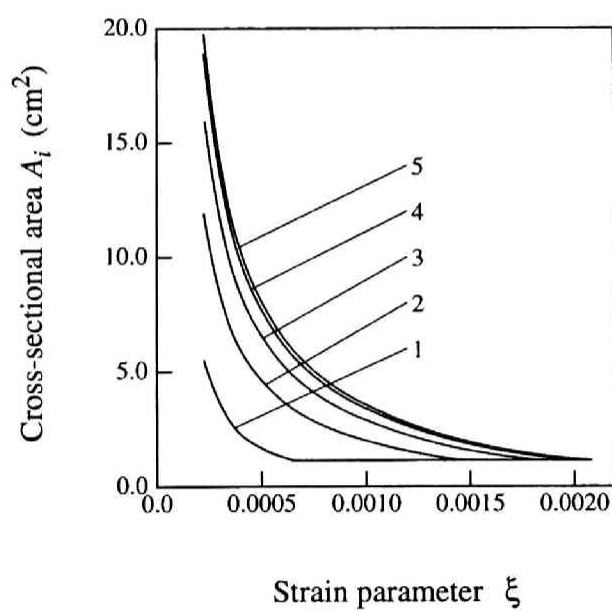


図 4.5 480 部材平板状立体トラスの強震時応答ひずみ制約設計解
順序集合における ξ と部材断面積の関係

表 4.2 地震時応答制約設計解の固有値 (rad^2/s^2)

設計ひずみパラメータ $\xi = 4.35273 \times 10^{-4}$	yz 平面に関して 対称	yz 平面に関して 逆対称
xz 平面に関して 対称	$\Omega_4^0 = 471.959 \equiv \Omega_1^s$ (472.386) $\Omega_7^0 = 3011.58 \equiv \Omega_2^s$ (3014.82) $\Omega_9^0 = 3708.92 \equiv \Omega_3^s$ (3709.16)	$\Omega_2^0 = 0.836600$ $\Omega_6^0 = 2017.02$ $\Omega_{12}^0 = 5574.28$
xz 平面に関して 逆対称	$\Omega_1^0 = 0.836239$ $\Omega_5^0 = 719.290$ $\Omega_{10}^0 = 4419.73$	$\Omega_3^0 = 1.90714$ $\Omega_8^0 = 3486.67$ $\Omega_{11}^0 = 5412.05$
設計ひずみパラメータ $\xi = 2.23077 \times 10^{-4}$	yz 平面に関して 対称	yz 平面に関して 逆対称
xz 平面に関して 対称	$\Omega_4^0 = 866.849 \equiv \Omega_1^s$ (867.443) $\Omega_8^0 = 4113.07 \equiv \Omega_2^s$ (4116.36) $\Omega_{10}^0 = 4997.55 \equiv \Omega_3^s$ (4499.95)	$\Omega_2^0 = 0.788124$ $\Omega_7^0 = 3406.15$ $\Omega_{12}^0 = 7798.66$
xz 平面に関して 逆対称	$\Omega_1^0 = 0.787878$ $\Omega_5^0 = 1244.46$ $\Omega_9^0 = 4492.98$	$\Omega_3^0 = 1.79639$ $\Omega_6^0 = 3398.36$ $\Omega_{11}^0 = 6960.19$

するように描いたものである。ここで、構造物の対称性より、全体の 1/4 の部分について示した。図 4.3(a ~ d) より、 ξ を減少させると、剛な縁梁に相当するトラスが長辺方向の支点間に生成される様子がわかる。図 4.2 に部材番号を示した 5 つの部材に対して、部材断面積及び強震時最大応答ひずみと ξ の関係を、それぞれ図 4.4 及び図 4.5 に示す。これらの図より、 ξ を減少させる過程において、ある部材の応答ひずみが上限値に達すると、その部材の断面積が最小制限値から増加しはじめる様子がわかる。

表 4.2 には、 $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ 及び 2.2308×10^{-4} に対応する強震時応答ひずみ制約設計解に対して、固有値解析を行なって得られた 12 次までの固有値を示す。ここで、 Ω_r^0 は対称条件を導入せずに、全ての固有モードを考慮にいたした r 次の固有値であり、 Ω_r^s は xz 、 yz 両平面

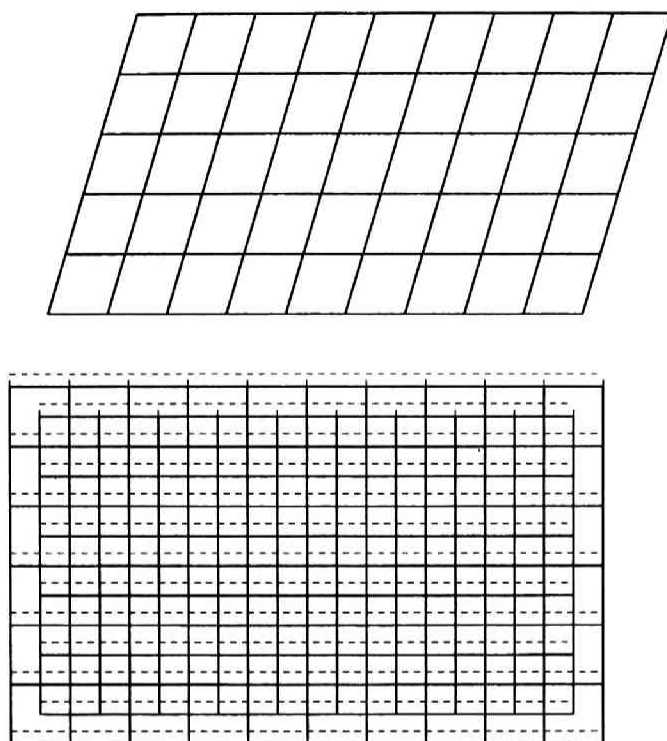


図 4.6(a) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 1 次固有モード

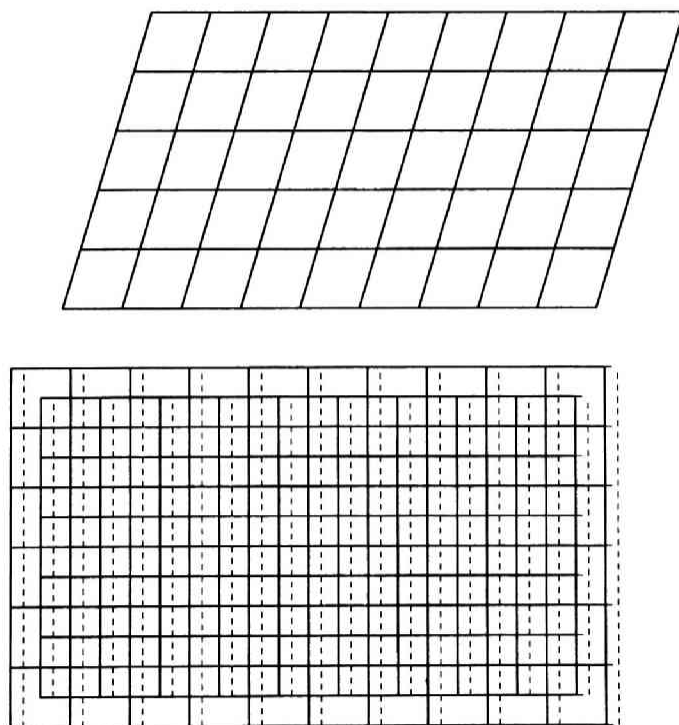


図 4.6(b) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 2 次固有モード

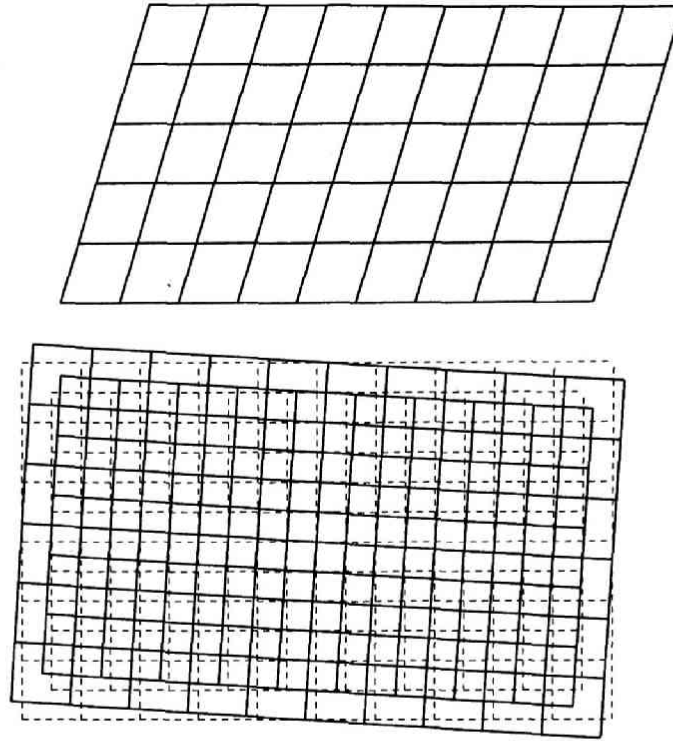


図 4.6(c) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 3 次固有モード

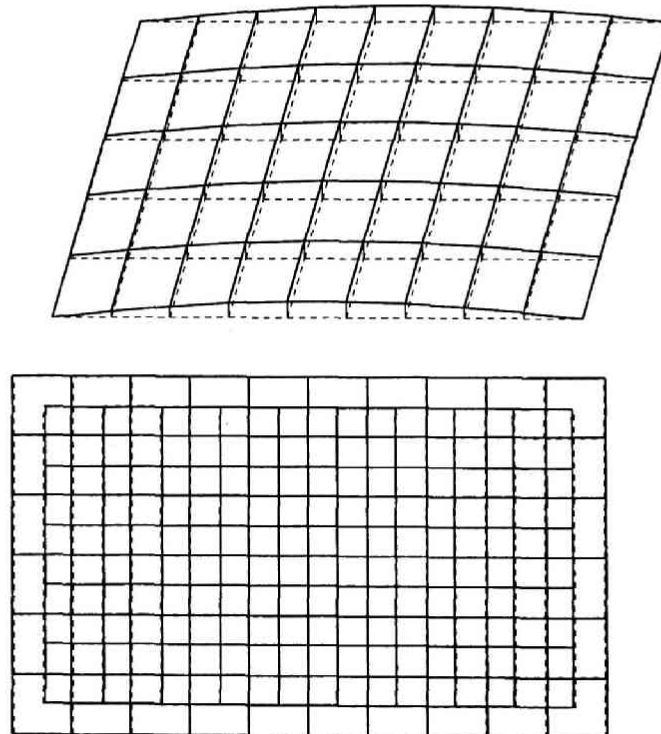


図 4.6(d) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 4 次固有モード

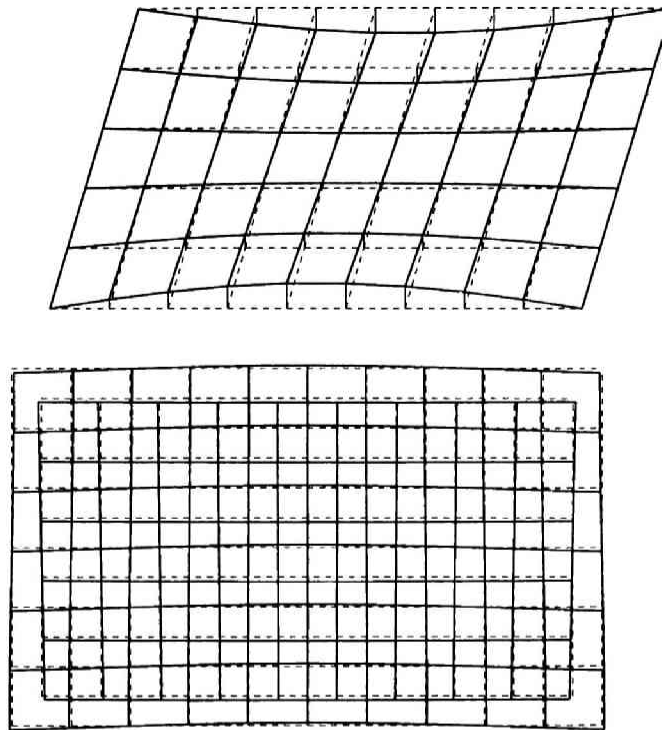


図 4.6(e) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 5 次固有モード

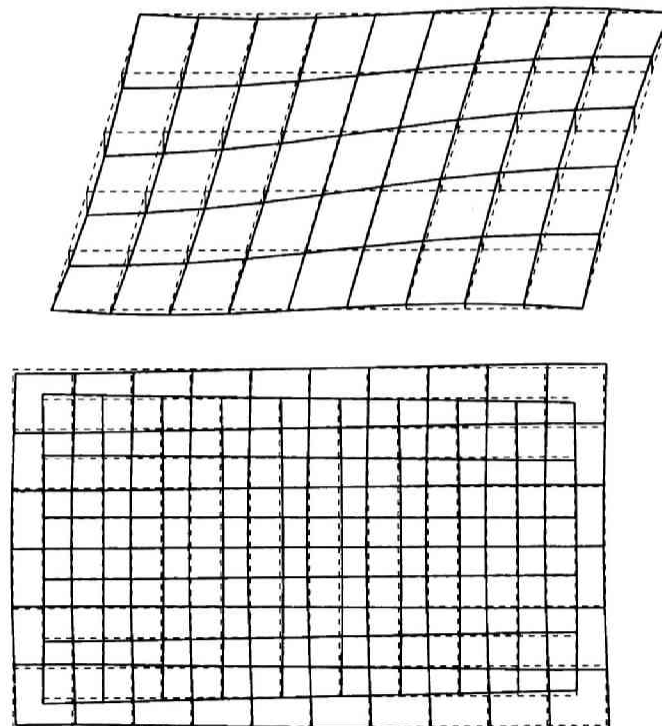


図 4.6(f) 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における 6 次固有モード

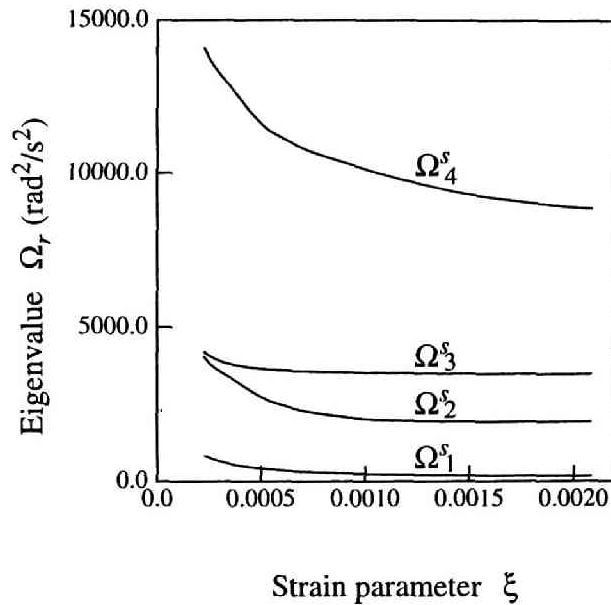


図 4.7 480 部材平板状立体トラスの強震時応答ひずみ制約設計解
順序集合における ξ 固有値の関係

に関して対称な固有モードのみを考慮した r 次固有値である。 $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ における、 $\Omega_1^0 \sim \Omega_6^0$ に対応する固有モードを図 4.6(a ~ f) に示す。ここで、下側は xy 平面内変位、上側は下層平面の z 方向変位を示したものである。また、点線は変形前の材軸線である。3 次までの固有モードは、 x 方向及び y 方向の剛体並進運動の固有モード及び z 軸回りの剛体回転運動の固有モードに対応する。これらの剛体モードでは、支点のバネのみが大きく変形し、トラスの部材はほとんど変形しない。また、それらのモードに対する刺激係数は 0 である。4 次モードは y 軸に平行な母線を有する円筒状に変形するモードであり、 Ω_4^0 は Ω_1^s に相当する。このモードは xz 平面及び yz 平面に関して対称であり、強震時応答を評価したときに卓越しているモードである。5 次モード及び 6 次モードは四角錐ユニットからなる平板上立体トラスにおいて典型的なモードであり、各四角錐ユニットが z 軸回りにねじれるような変形を有する。この例題では、 xz 、 yz 両平面に関して対称な固有モードのみを考慮すればよいので、それらのモードに対応する固有値について、テイラー展開で得られた値を表 4.2 の括弧内に示す。これらの結果より、テイラー展開による誤差は十分に小さいことがわかる。テイラー展開で得られた $\Omega_1^s \sim \Omega_4^s$ と ξ の関係を図 4.7 に示す。図 4.7 より、固有値が近接する場合があることがわかる。

CQC 法による応答評価の妥当性及び、減衰定数を一定とすることの正当性について検証するため、正弦波合成法による人工地震波作成プログラム SIMQKE[32] を用いて (4.39a ~ e) の応答スペクトルに適合する人工地震波を 20 波作成した。この地震波を用いて、 $\xi = 2.3841 \times 10^{-4}$ に対応する強震時応答ひずみ制約設計解に対して、次の 3 つの場合について検証を行なった。

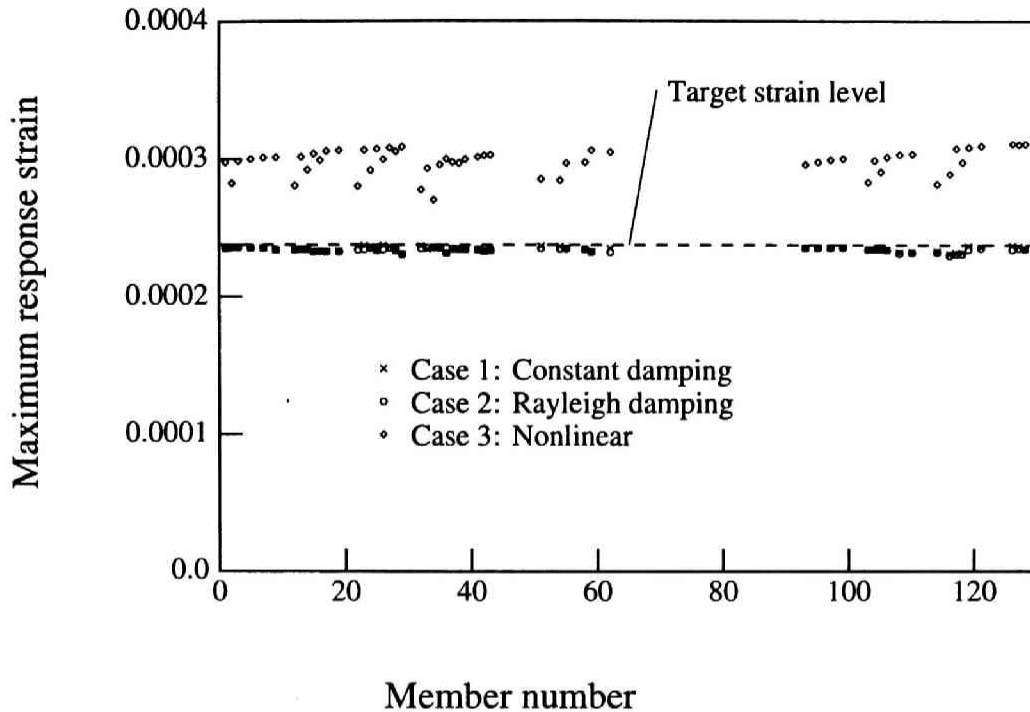


図 4.8 480 部材平板状立体トラスの $\xi = 4.3527 \times 10^{-4}$ に対応する強震時応答ひずみ
制約設計解に対する時刻歴応答解析による最大応答ひずみ

- Case 1** 全モードに対して $h_r = 0.02$ とし、4 次固有モードまで考慮し、Nigham-Jennings 法を用いた線形時刻歴モーダルアナリシスによる応答解析。
- Case 2** $h_r = 0.02\sqrt{\Omega_r/\Omega_1}$ すなわち $h_1 = 0.02$ の振動数比例型レイリー減衰とした、**Case 1** と同様の解析。
- Case 3** **Case 2** と同一の減衰定数を用いた、NONSAP[33] による幾何学的非線形性を考慮した時刻歴応答解析。

Case 1 ~ **Case 3** の応答解析で得られた最大応答ひずみの平均値を、 $A_i > \bar{A}_i$ すなわち $\varepsilon_i = \xi \Lambda_i^b$ である部材に対して図 4.8 に示す。図 4.8 より、線形時刻歴応答解析による最大応答ひずみの平均値は、指定値にほぼ一致していること及び、減衰定数を一定とすることの影響がほとんどないことがわかる。また、幾何学的非線形性の影響により、 $A_i > \bar{A}_i$ である全ての部材の最大応答ひずみはほぼ一様に増加している。したがって、この例では、幾何学的非線形性を考慮しない場合の最大応答ひずみをあらかじめ小さく指定することにより、幾何学的非線形性を考慮した場合の最大応答ひずみがほぼ指定値に一致するような設計解を得ることができる。

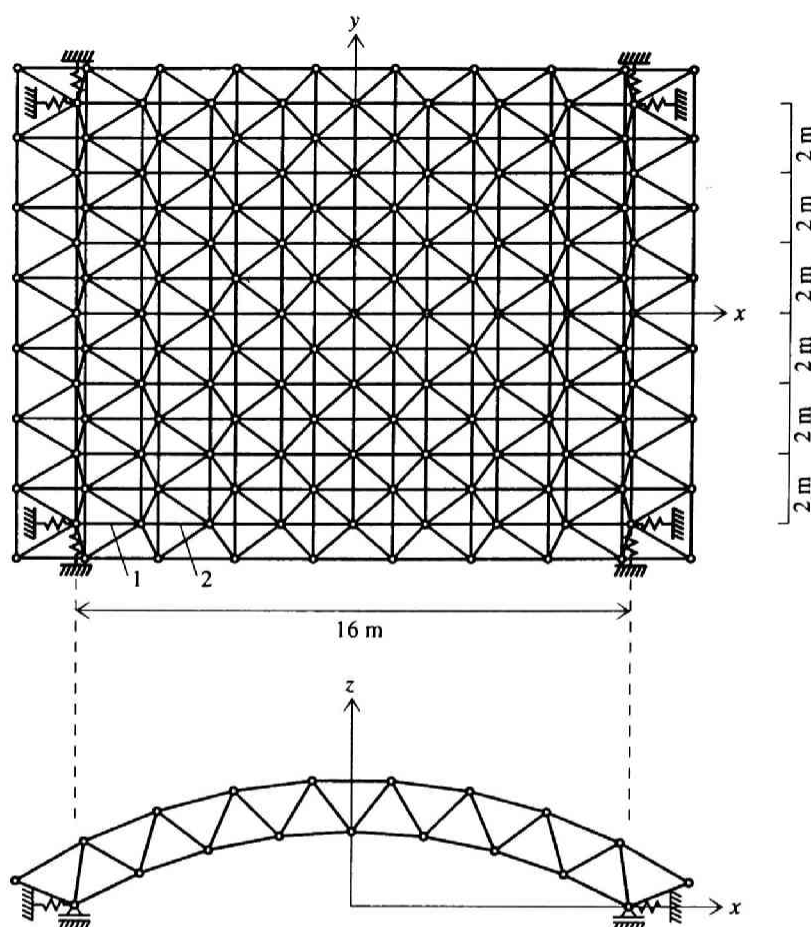


図 4.9 504 部材円筒状立体トラス

504 部材円筒状立体トラスの最適設計

図 4.9 のような 504 部材円筒状立体トラスに対して，強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し，最適設計問題の最適性条件に関して検定を行なう。下層及び上層の節点の存在する円筒の半径は，それぞれ 16.0 m 及び 17.5 m である。 x 方向下弦材， x 方向上弦材， y 方向上下弦材及び斜材はそれぞれ同一の部材長を有する。支점에接続するバネの伸び剛性は， 1.0290×10^5 N/m である。最小断面積制限値は，全部材に対して 5.0 cm^2 とする。また，上層節点に 800.0 kg (4 辺では 400.0 kg，4 隅では 200.0 kg) の集中質量を与える。この例題でも，全体の 1/4 の部分に対してテイラー展開を行なう。

初期設計解 $A = \bar{A}$ に対する ξ の値は 1.4648×10^{-3} である。ここで，強震時応答ひずみに対する制約条件 (4.74a, b) は，図 4.9 に示した第 1 部材において等号で満たされている。 $\xi = 5.0762 \times 10^{-4}$ ， 3.2613×10^{-4} ， 2.4711×10^{-4} 及び 2.0069×10^{-4} に対応する強震時応答ひずみ制約設計解を図 4.10(a ~ d) に示す。ここで，構造物の対称性より全体の 1/4 の部分について示した。図 4.10(a ~ d) より， ξ を減少させると，支点間の上下弦材及び支点近くの斜材の断

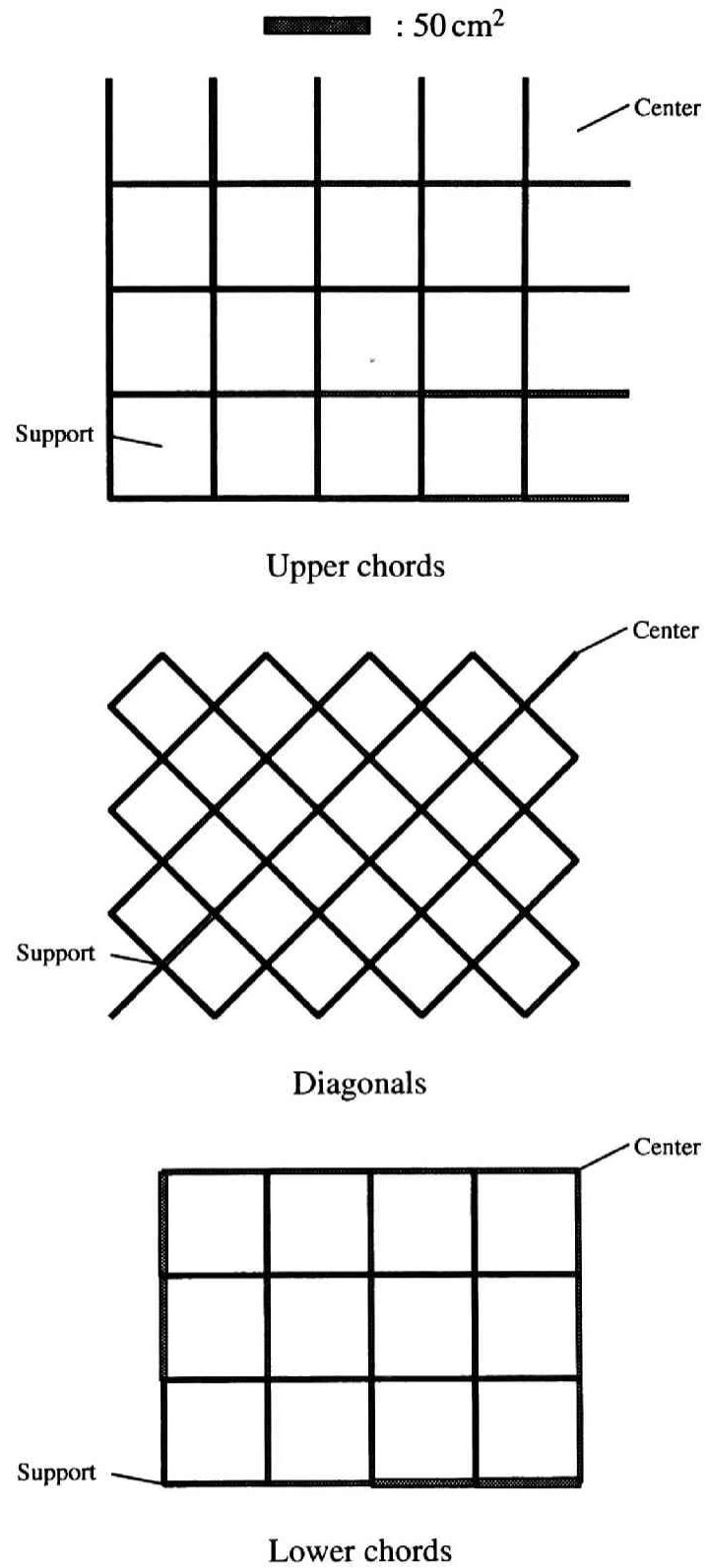


図 4.10(a) 504 部材円筒状立体トラスの $\xi = 5.0762 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

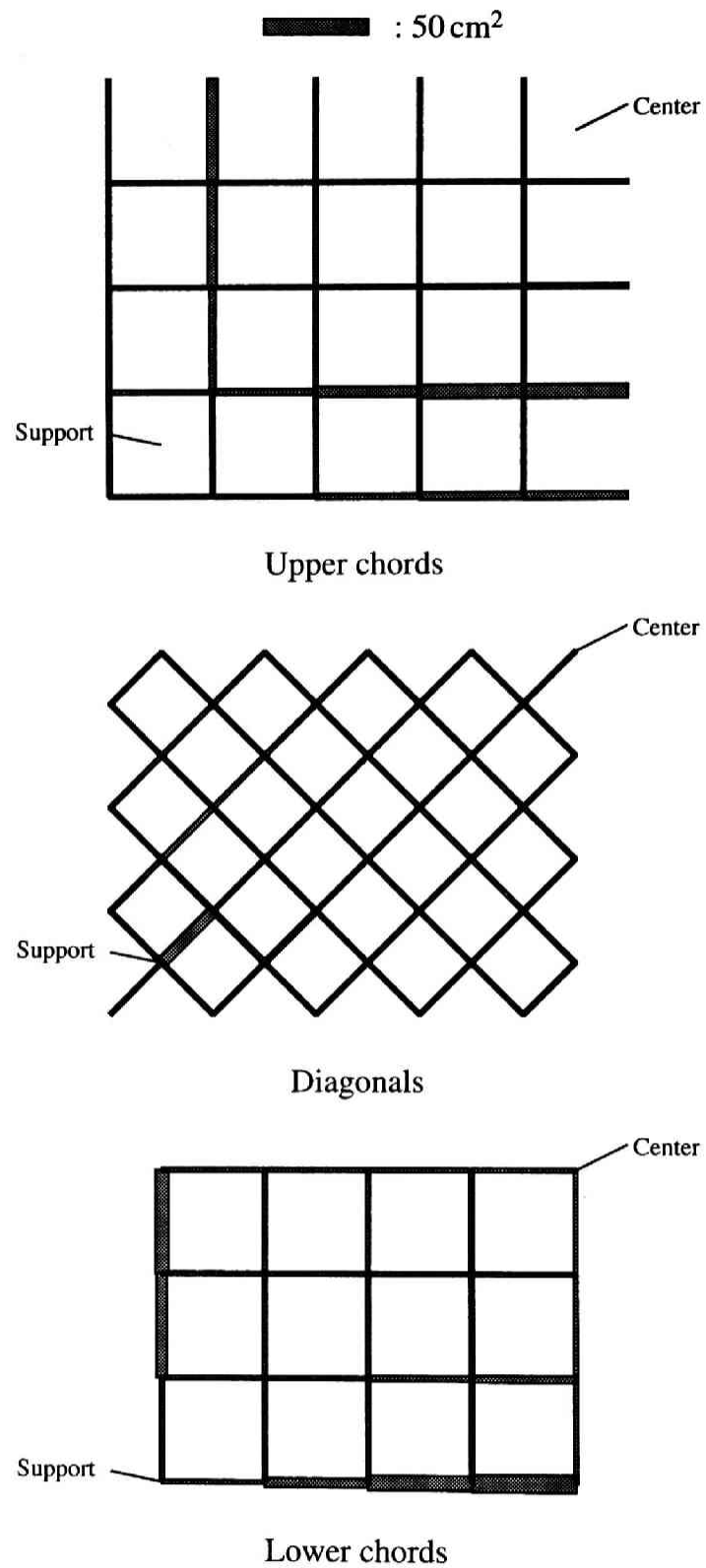


図 4.10(b) 504 部材円筒状立体トラスの $\xi = 3.2613 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

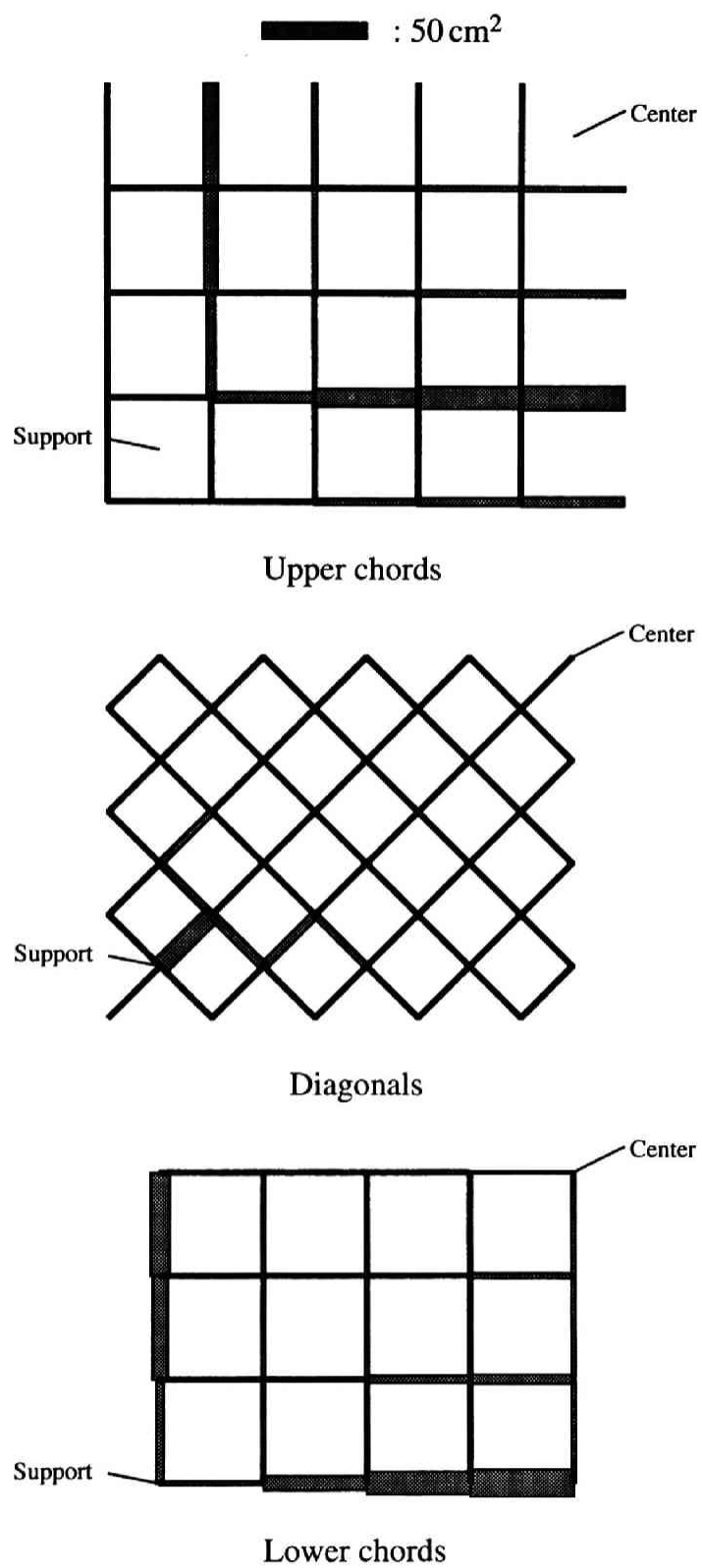


図 4.10(c) 504 部材円筒状立体トラスの $\xi = 2.4711 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

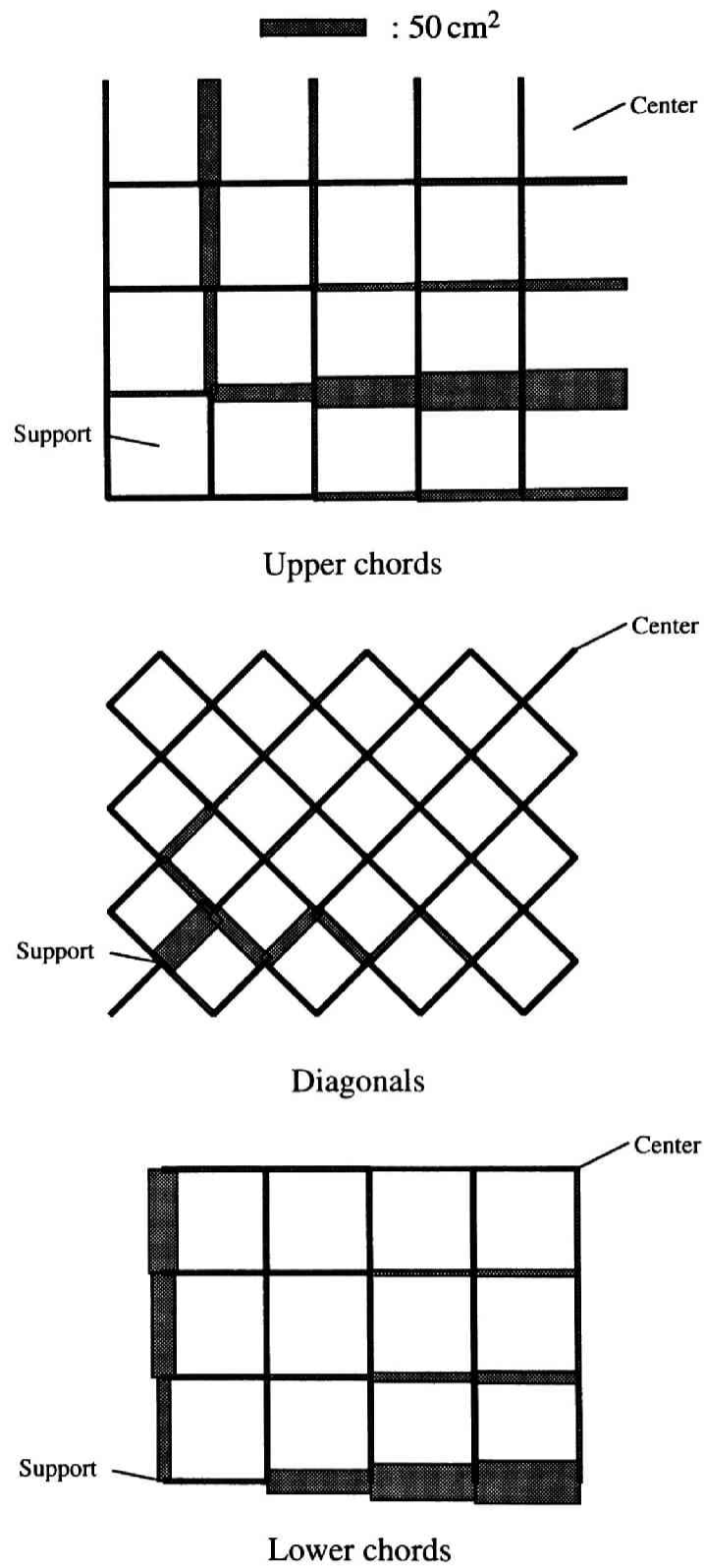


図 4.10(d) 504 部材円筒状立体トラスの $\xi = 2.0069 \times 10^{-4}$ に対応する強震時
応答ひずみ制約設計解における部材断面積

面積が増加することがわかる。 $\xi = 2.5081 \times 10^{-4}$ に対応する強震時応答ひずみ制約設計解に対して固有値解析を行ない、CQC法を用いて最大応答ひずみを評価した結果、最大応答ひずみの全部材にわたっての最大値は 2.5055×10^{-4} である。ゆえに、テイラー展開による誤差は十分に小さいことがわかる。

得られた強震時応答ひずみ制約設計解に対して、4.3節に示した手法を用い、最適性必要条件(4.14)～(4.16)におけるラグランジュ乗数を求めた結果、 $\xi > 1.0715 \times 10^{-3}$ では全てのラグランジュ乗数が非負であり、強震時応答ひずみ制約設計解は、Problem ODPESの最適設計解であることが検証された。 $\xi = 1.0715 \times 10^{-3}$ において、図4.9に示す第2部材で ν_i の値は負となっており、 $\xi < 1.0715 \times 10^{-3}$ に対しては、強震時応答ひずみ制約設計解は最適設計解とはならないことがわかった。 ξ と ν_2 の関係を図4.11の実線で示す。さらに、図4.11の点線は ν_1 の値をプロットしたものである。図4.11より、 ν_i は ξ の不連続な関数であることがわかる。ここで、 ν_i が不連続に変化する ξ の値では、 $A_i > \bar{A}_i$ である部材の数が増加している。

強震時応答ひずみ制約設計解における全部材体積 \hat{V} と ξ の関係を、図4.12の実線で示す。図4.12より、 ξ を減少させても \hat{V} はあまり変化しないことがわかる。このことは、 A_i が \bar{A}_i から増加する部材の数が少ないことと関係している。いま、 Λ_i^b は全部材に対して $\Lambda_i^b = 1$ となるように与えたので、 ξ は最大応答ひずみ全部材にわたっての最大値を意味している。そこで、最も単純な例として、全部材を同一の断面積としたトラスでの、最大応答ひずみの最大値と全部材体積の関係を図4.12の点線で示す。図4.12より、強震時応答ひずみ制約設計解は、最適性条件を満たさない ξ の領域でも、全ての部材で同一の断面積を有するトラスと比べると、目標とする最大応答ひずみを実現するために必要な全部材体積はきわめて少なくなることがわかる。

4.5 4章の結論

本章では、指定強震時応答ひずみを有する最適トラスの順序集合生成法に関して次のような成果を得た。

1. 「指定強震時応答ひずみを有するトラスの最適設計問題」を定式化し、最適性必要条件を導いた。ここで、強震時応答ひずみはCQC法を用いて評価し、設計応答スペクトルはあらかじめ与えられているものとする。
2. 強震時応答ひずみが、断面積が最小断面積制限値を超える部材では指定値に一致し、断面積が最小断面積制限値に一致する部材では指定値以下となるような不等式制約条件を有する、「強震時応答ひずみ制約設計問題」を定式化した。この問題は、全応力設計問題の1つと考えられる。
3. 「強震時応答ひずみ制約設計解順序集合」という新しい概念を導入し、応答ひずみの上限値をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、応答ひずみ制約設計解の順序集合を生成する理論及び数値的手法を開発した。

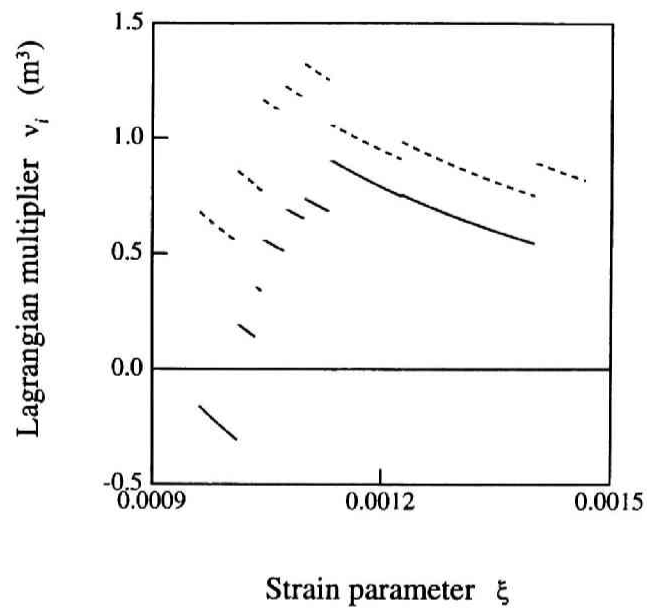


図 4.11 504 部材円筒状立体トラスの強震時応答ひずみ制約設計解
順序集合における ξ とラグランジュ乗数 ν_i の関係

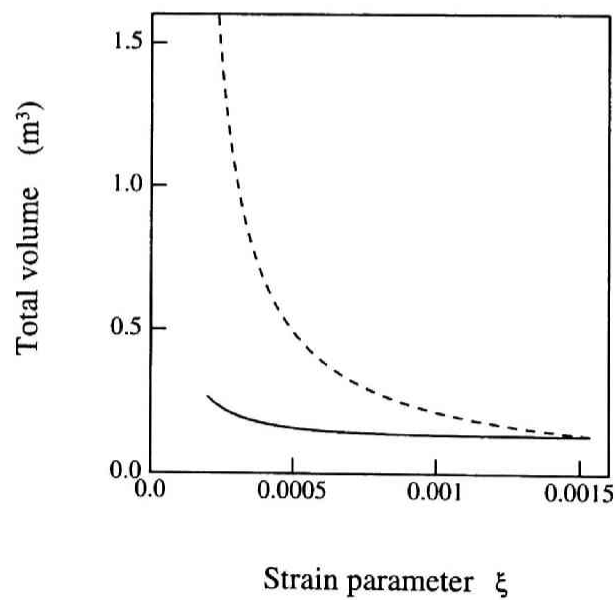


図 4.12 504 部材円筒状立体トラスの強震時応答ひずみ制約設計解
順序集合における ξ と全部材体積の関係

4. 3.の手法によると、種々の応答ひずみの上限値に対応する応答ひずみ制約設計解を容易に求めることができ、設計者はそれらの候補設計解から最も望ましい設計解を選択することができる。さらに、応答ひずみの上限値をパラメータとした、全部材体積、固有値等に関する種々の設計図表を提供することができる。
5. 480部材平板状立体トラスに対して、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成することにより、本手法の有効性を示した。さらに、得られた応答制約設計解の種々の特性を明らかにした。
6. 504部材円筒状立体トラスに対して、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し、その特性を明らかにした。また、得られた応答制約設計解に対して、1.の最適性必要条件の検定を行なうことにより、指定応答ひずみの広い範囲にわたって、応答ひずみ制約設計解が1.で定式化した最適設計問題の最適設計解となっていることを例証した。さらに、最適性必要条件が満たされない場合にも、応答ひずみ制約設計解は、部材の材料を有効に利用した実用上有意義な設計解であることを示した。

参考文献

- [1] E.J. Haug and J.S. Arora, Applied Optimal Design, John Wiley, New York, 1979.
- [2] E.J. Haug and J.S. Arora, Design sensitivity analysis of elastic mechanical systems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.15, pp35-62, 1978.
- [3] H. Yamakawa, Optimum structural designs for dynamic response, in: New Directions in Optimum Structural Design, E. Etres, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell and O.C. Zienkiewicz (eds.), pp249-266, John Wiley, New York, 1984.
- [4] C.C. Hsieh and J.S. Arora, Design sensitivity analysis and optimization of dynamic response, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol.43, pp195-219, 1984.
- [5] R.L. Fox and M.P. Kapoor, Rates of change of eigenvalues and eigenvectors, AIAA J., Vol.6, pp2426-2429, 1968.
- [6] R.L. Fox and M.P. Kapoor, Structural optimization in the dynamic response regime; A computational approach, AIAA J., Vol.8, pp1798-1804, 1970.
- [7] J.S. Arora and E.J. Haug, Optimum structural design with dynamic constraints, J. Struct. Div., ASCE, Vol.103, pp2071-2074, 1979.
- [8] T. Feng, J.S. Arora and E.J. Haug, Optimal structural design under dynamic loads, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.11, pp39-52, 1977.
- [9] F.Y. Cheng and M.E. Botkin, Nonlinear optimum design of dynamic damped frames, J. Struct. Div., ASCE, Vol.102, pp609-627, 1976.

- [10] M.A. Bhatti and K.S. Pister, A Dual criteria approach for optimal design of earthquake-resistant structural systems, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol.9, pp557-572, 1981.
- [11] R.J. Balling, K.S. Pister and V. Ciampi, Optimal seismic-resistant design of a planner steel frame, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol.11, pp541-556, 1983.
- [12] Tsuneyoshi Nakamura and T. Yamane, Optimum design and earthquake-response constrained design of elastic shear buildings, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol.14, pp791-815, 1986.
- [13] 中村 恒善, 山根 尚志, 1 次固有周期制約条件下の最適設計解とそれに基づく地震時応答変位の最大値の制御, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 構造, pp1041-1042, 1983.
- [14] 中村 恒善, 竹脇 出, 弾性支持された剪断型建築構造物の地震時応答制約設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), 構造 I, pp631-632, 1987.
- [15] 中村 恒善, 中村 豊, 2 軸偏心剪断型構造物の 1 次固有周期制約条件下の最適設計解に基づく地震時弾性応答量の制御法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東海), 構造 I, pp273-274, 1985.
- [16] 中村 恒善, 竹脇 出, 島野 幸弘, 平面弾性せん断型構造物—杭系の地震時応答制約設計, 日本建築学会構造系論文報告集, Vol.403, pp125-137, 1989.
- [17] 小原 貢, 中村 恒善, 設計用地震時応答ひずみに対する 1 クラスの筋違付平面骨組の剛性設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp623-624, 1990.
- [18] 島野 幸弘, 中村 恒善, 弾性建築骨組—杭—地盤連成系の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp625-626, 1990.
- [19] 龍 正哉, 中村 恒善, 二層等剛性せん断型構造物の最適設計及び地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp627-628, 1990.
- [20] Tsuneyoshi Nakamura and I. Takewaki, Earthquake-response constrained design of pile-supported elastic shear buildings for site-dependent response spectra, in: *Proc. 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, Maruzen, Tokyo, pp1043-1048, 1989.
- [21] I. Kosaka and Tsuneyoshi Nakamura, Inelastic response constrained design of shear buildings via elastic response constrained design, in: *Proc. 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Vol.V, Maruzen, Tokyo, pp965-970, 1989.
- [22] Tsuneyoshi Nakamura and M. Ohsaki, Sequential generator of earthquake-response constrained trusses for design strain ranges, *Int. J. Comput. & Struct.*, Vol.33(6), pp1403-1416, 1989.
- [23] 中村 恒善, 大崎 純, 草場 茂樹, 大規模弾性立体トラスの地震時応答制約設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (近畿), 構造 I, pp1307-1308, 1987.
- [24] 中村 恒善, 大崎 純, 設計ひずみ領域に対する地震時応答ひずみ制約設計トラスの順序集合生成法, 第 39 回応用力学連合講演会, pp201-204, 1989.

- [25] Tsuneyoshi Nakamura and M. Ohsaki, Sequential generator of earthquake-strain constrained curved space trusses for design strain ranges, in: Optimization of Structural Systems and Industrial Applications, Proc. OPTI91, Cambridge, MA, C.A. Brebbia and S. Hernandez (eds.), Elsevier, London, 233-244, 1991.
- [26] Tsuneyoshi Nakamura and M. Ohsaki, Geometrical optimization of elastically supported doubly curved space trusses designed for specified earthquake-strains, in: Proc. IV-ICCCBE, JSCE and AIJ, Tokyo, pp337, 1991.
- [27] E.L. Wilson, A.D. Kiureghian and E.P. Bayo, A replacement for the SRSS method in seismic analysis, Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.9, pp187-194, 1981.
- [28] A.D. Kiureghian, On response of structures to stationary excitation, Report No. EERC 79-32, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 1979.
- [29] G.A. Gunnlaugsson and J.B. Martin, Optimality condition for fully stressed designs, SIAM. J. Appl. Math., Vol.25(3), pp474-482, 1973.
- [30] T.P. Kicher, Optimum design-minimum weight versus fully stressed, J. Struct. Div., ASCE, Vol.92, pp265-279, 1966.
- [31] N.M. Newmark and W.J. Hall, Earthquake Spectra and Design, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, CA, 1982.
- [32] D.A. Gasparni and E.H. Vanmarcke, Simulated earthquake motions compatible with prescribed response spectra SIMQKE, A computer program distributed by NISEE/Computer Applications, Massachusetts Institute of Technology, MA, 1976.
- [33] K. Bathe, E.L. Wilson and R.H. Iding, A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems, Report No. UCSCSM 74-3, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, CA, 1974.

5 章 指定 1 次固有振動数を有するトラスの 最適部材配置生成法 †

5.1 序

本章では、節点位置及び存在可能部材の配置が定められたトラスに対して、指定 1 次固有振動数を有し、かつ全部材体積を最小にするような最適部材配置及び、それに対応する部材断面積集合を見いだす問題 (topology optimization problem) を取り扱う。この問題は、トラスの形状最適化問題の 1 つである。

トラスの形状最適化に関する研究は、Michell[1] の論文にまでさかのぼることができる。しかし、いわゆる Michell トラスは理論的には興味深い、無数の部材が存在するため実現不可能である。Prager[2] は Michell の理論を拡張し、有限な数の部材で構成される、より現実的な理論を展開した。この系統の研究の概要については、文献 [3] に詳しく述べられている。最近、数理計画法のアルゴリズムに基づく多くの数値的手法が開発されている [4-18]。しかし、それらの研究のほとんどは、静的外力が作用したときの、応力及び変位に関する制約条件を有する問題を取扱ったものである。この分野の過去の研究は、文献 [15] にまとめられている。

Kirsh[9] は、静的外力が作用したときの応力に関する制約条件を考慮した、トラスの形状最適化問題に対して、1 つの数値的手法を開発した。その手法では、ひずみの適合条件を無視した線形計画問題を解いており、得られた設計解が最適設計解であるという保証はない。Ringertz[11] は、静的外力が作用したときの変位及び応力に関する制約条件を考慮した問題に対して、その第 1 段階で、変位を固定した線形計画問題を解く 1 つの手法を提示した。しかし、その手法でも、得られた設計解が最適設計解であるという保証はない。Sved and Ginos[8] は、静的外力が作用したときの応力に関する制約条件を有するトラスの最適設計問題では、存在しない部材では応力制約条件は満たされなくてもよい、最適設計解が最適設計問題の許容設計解集合の外部の特異な設計解 (孤立解) となる場合があり、断面積を連続変数と考えた通常の最適設計問題に対する最適設計解において、断面積が 0 となる部材を取り除く手法では、大域最適設計解が得られるとは限らないということを論じている。これらの困難点のため、静的外力が作用したときの応力に関する制約条件を考慮した場合のトラスの形状最適化問題に対しては、大域最適設計解を求めるための一般的手法は存在しない。

一方、指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対する最適設計解は、大域最適設計解であることが保証されている。したがって、最小断面積制限値が存在しない場合の最適設計問題を解くことにより、最適部材配置を求めることができる。文献 [14] では、指定 1 次固有振動数を有するトラスの形状最適化問題に対する数値的手法が示されている。その方法では、節点位置を設計変数と考え、部材断面積に対しては最小制限値が与えられているため、存在可能であると考えた部材の

†本章の 5.2 節及び 5.3 節の一部は、すでに文献 [19] に発表済みである。

断面積が 0 になることはなく、トポロジーは最適化されない。著者の知る限りでは、指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適部材配置（最適トポロジー）を求めるための手法は、著者らの論文 [19,20] 以外には存在しない。

3 章では、指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対して、最適設計解を、指定 1 次固有振動数に対応する指定 1 次固有値の関数と考え、指定 1 次固有値に関する区分的テイラー展開手法を用いて最適設計解集合を求める理論を展開した。本章では、まず、最小断面積制限値を有する最適設計問題を定式化し、最適設計解を最小断面積制限値を規定するパラメータの関数と考え、そのパラメータに関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する手法を提示する。さらに、本手法を用いて最小断面積制限値を 0 にまで減少させ、断面積が 0 となる部材を取り除くことにより、最適部材配置及びそれに対応する部材断面積集合（最適部材配置トラス）を求める理論を展開する。また、ピン接合平面トラスに対して「理論的最適部材配置トラス」を求めると、そのトラスには非常に小さい部材断面積を有する 2 次的部材が存在することを示す。そこで、2 次的部材の存在しない不安定な最適部材配置トラスを生成し、その不安定性を取り除いて「実用的最適部材配置トラス」を得るための手法を示す。剛接合平面及び立体トラスに対してはそのような不安定性は生じず、最小断面積制限値を 0 に減少させることにより、容易に最適部材配置トラスを求めることができる。

本章で用いる記号の定義を以下に示す。

\mathbf{a}	$\bar{\mathbf{A}}$ に対する基本ベクトル
$\mathbf{A} = \{A_i\}$	部材断面積ベクトル
\mathbf{A}^0	不安定な最適部材配置トラスの部材断面積ベクトル
$\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{A}_i\}$	最小断面積制限値ベクトル
A^R	円筒部材の断面積
\mathbf{B}	ξ に関する微分係数を求めるための連立 1 次方程式を構成する行列
\mathbf{b}_k	ξ に関する k 階微分係数を求めるための連立 1 次方程式の既知ベクトル
f	変位の自由度
I^B	円筒部材の断面 2 次モーメント
I^P	円筒部材の断面 2 次極モーメント
\mathbf{K}	系剛性行列
$\mathbf{L} = \{L_i\}$	部材長ベクトル
\mathbf{M}_D	部材質量に関する系コンシステント質量行列

M_J	節点集中質量に関する系質量行列
m	部材数
m^I	$A_i > \bar{A}_i$ が成立する部材の数
R_E	円筒部材の外径
R_I	円筒部材の内径
s	1 次固有値の重複度
V	全部材体積
Ω_r	r 次固有値
Φ_r	r 次固有モード
Ω_a	指定 1 次固有値
ξ	$\bar{\mathbf{A}}$ を規定するスカラーパラメーター
ξ^u	ξ の初期値
μ_r	ラグランジュ乗数
ν_i	ラグランジュ乗数

5.2 最小断面積制限値をパラメーターとした最適設計解順序集合生成法

本節では、まず、節点位置及び存在可能部材の配置が定められたトラスに対し、指定 1 次固有値を有し、かつ全部材体積を最小にするような最適設計解を見いだす問題を考える。ここで、各部材に対し最小断面積制限値を与えるものとする。さらに、最小断面積制限値が 1 つのパラメーターを用いて定められるとき、そのパラメーターに関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する手法を示す。

第 i 部材の断面積を A_i とすると、トラスは A_i の集合を表わすベクトル $\mathbf{A} = \{A_i\}$ で完全に決定される。 r 次固有値を $\Omega_r(\mathbf{A})$ で表わす。また、変位の自由度及び部材数をそれぞれ f 及び m で表わす。指定 1 次固有値を Ω_a とし、最適設計問題を次のように定式化する。

[Problem TOTF]

1 次固有値制約条件

$$\Omega_r(\mathbf{A}) \geq \Omega_a \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.2)$$

及び, 最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.3)$$

の下で, 全部材体積

$$V(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m (A_i L_i) \quad (5.4)$$

を最小にするような最適設計解を求めよ。

ここで, L_i 及び \bar{A}_i は, それぞれ第 i 部材の部材長及び最小断面積制限値である。また, 1 次固有値制約条件 (5.2) は, 全ての固有値が指定値 Ω_a 以上でなければならないことを意味する。

系座標に関する系剛性行列, 部材質量による系コンシステント質量行列及び, 節点集中質量による系質量行列をそれぞれ $\mathbf{K}(\mathbf{A})$, $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$ 及び \mathbf{M}_J で表わす。また, r 次固有モードを $\Phi_r(\mathbf{A})$ とすると, 自由振動の運動方程式より次式を得る。

$$\mathbf{K}(\mathbf{A})\Phi_r(\mathbf{A}) = \Omega_r(\mathbf{A})\{\mathbf{M}_D(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J\}\Phi_r(\mathbf{A}) \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.5)$$

正規化条件は, 次のように定める。

$$\Phi_r(\mathbf{A})^T \{\mathbf{M}_D(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J\} \Phi_r(\mathbf{A}) = 1 \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.6)$$

ここで, 上添字 T はベクトルの転置を表わす。(5.5) より, レイリー商は次のように書ける。

$$\Omega_r(\mathbf{A}) = \frac{\Phi_r(\mathbf{A})^T \mathbf{K}(\mathbf{A}) \Phi_r(\mathbf{A})}{\Phi_r(\mathbf{A})^T \{\mathbf{M}_D(\mathbf{A}) + \mathbf{M}_J\} \Phi_r(\mathbf{A})} \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.7)$$

Problem TOTF に対する最適設計解では, 3 章で示したように, 1 次固有値が重複する場合が多い。したがって, Problem TOTF に対する局所最適性の必要条件 (Kuhn-Tucker 条件) は, 1 次固有値の重複度を s とすると次のようになる。

$$\frac{\partial V(\mathbf{A})}{\partial A_i} - \sum_{r=1}^s \left(\mu_r \frac{\partial \Omega_r(\mathbf{A})}{\partial A_i} \right) - \nu_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.8)$$

$$\nu_i(\bar{A}_i - A_i) = 0, \quad \nu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.9a, b)$$

$$\mu_r\{\Omega_a - \Omega_r(\mathbf{A})\} = 0, \quad \mu_r \geq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (5.10a, b)$$

ここで、 μ_r 及び ν_i はラグランジュ乗数である。(5.7) を (5.8) に代入し、(5.4)、(5.5) 及び (5.6) を用いると次式を得る。

$$L_i - \zeta_i(\mathbf{A}) - \nu_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.11)$$

ここで、

$$\zeta_i(\mathbf{A}) = \sum_{r=1}^s \{ \mu_r \Phi_r(\mathbf{A})^T (\mathbf{K}_i^* - \Omega_a \mathbf{M}_{Di}^*) \Phi_r(\mathbf{A}) \} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i^* &= \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{A})}{\partial A_i} \\ \mathbf{M}_{Di}^* &= \frac{\partial \mathbf{M}_D(\mathbf{A})}{\partial A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.13a, b)$$

である。ここで、トラスに対しては $\mathbf{K}(\mathbf{A})$ 及び $\mathbf{M}_D(\mathbf{A})$ は $\{A_i\}$ の線形関数であるから、 \mathbf{K}_i^* 及び \mathbf{M}_{Di}^* は $\{A_i\}$ に依存しない定数行列であり、 \mathbf{K} 及び \mathbf{M}_D は \mathbf{K}_i^* 及び \mathbf{M}_{Di}^* を用いてそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{i=1}^m (A_i \mathbf{K}_i^*) \\ \mathbf{M}_D &= \sum_{i=1}^m (A_i \mathbf{M}_{Di}^*) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.14a, b)$$

条件 (5.8) ~ (5.10a, b) が大域最適性の必要十分条件でもあることは、固有値が重複しない場合には、文献 [21] と同様にして Rayleigh の原理を用いて証明できる。また、固有値が重複する場合には、文献 [22, 23] と同様にして証明できる。

指定 1 次固有値 Ω_a が与えられたとき、Problem TOTF に対する最適設計解は、 $\bar{\mathbf{A}}$ を定めるごとに決定されるため、 $\bar{\mathbf{A}}$ の関数と考えることができる。いま、 $\bar{\mathbf{A}}$ をスカラーパラメーター ξ 及び基本ベクトル \mathbf{a} を用いて

$$\bar{\mathbf{A}} = \xi \mathbf{a} \quad (5.15)$$

のように定めるものとする。このとき、最適設計解は ξ の関数と考えることができ、それを $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ のように表わす。 ξ は全順序関係の成立する実数値集合に属するため、 $\hat{\mathbf{A}}(\xi)$ を「 ξ をパラメーターとした最適設計解順序集合」と定義する。 $\Phi_r(\hat{\mathbf{A}})$ 、 $\Omega_r(\hat{\mathbf{A}})$ 及び $\zeta_i(\hat{\mathbf{A}})$ も ξ の関数となり、それらを $\hat{\Phi}_r(\xi)$ 、 $\hat{\Omega}_r(\xi)$ 及び $\hat{\zeta}_i(\xi)$ のように表わす。ラグランジュ乗数についても、 ξ の関数であることを上添字 $\hat{}$ を用いて表わす。これらの関数は、 ξ に関して必要な階数まで区分的に微分可能であるものとする。ある ξ の値に対する最適設計解が得られると、3 章の手法と同様にして、 ξ に関するテイラー展開式で最適設計解の集合を表現することができる。

(5.5), (5.6), (5.11) 及び (5.12) の両辺を ξ で微分し, (5.14) を用いると次の各式を得る。

$$\left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}' K_i^*) \right\} \hat{\Phi}_r + \hat{K} \hat{\Phi}'_r = \hat{\Omega}'_r \{ \hat{M}_D + M_J \} \hat{\Phi}_r + \hat{\Omega}_r \left\{ \sum_{i=1}^m \hat{A}' M_{Di}^* \right\} \hat{\Phi}_r + \hat{\Omega}_r \{ \hat{M}_D + M_J \} \hat{\Phi}'_r \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.16)$$

$$2 \hat{\Phi}_r^T \{ \hat{M}_D + M_J \} \hat{\Phi}'_r + \hat{\Phi}_r^T \left\{ \sum_{i=1}^m (\hat{A}' M_{Di}^*) \right\} \hat{\Phi}_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, f) \quad (5.17)$$

$$\hat{\zeta}'_i + \hat{\nu}'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.18)$$

$$\hat{\zeta}'_i = \sum_{r=1}^s \left\{ \hat{\mu}'_r \hat{\Phi}_r^T (K_i^* - \Omega_a M_{Di}^*) \hat{\Phi}_r + 2 \hat{\mu}_r \hat{\Phi}_r^T (K_i^* - \Omega_a M_{Di}^*) \hat{\Phi}'_r \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5.19)$$

ここで, 上添字 ' は ξ に関する微分を表わす。また, 簡単のため引数 ξ は省略する。3章で述べたように, 全部材の断面積がその最小制限値で定まる設計 $A = \bar{A}$ は, Problem TOTF に対する1つの自明な最適設計解であるから, 設計 $A = \bar{A}$ を初期最適設計解として, ξ に関する区分的テイラー展開により, 2章で示した手法を用いて最適設計解順序集合を生成することができる。(5.9a, b), (5.11) 及び (5.18) より次の各式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{A}_i > \xi a_i \quad \text{のとき} \quad \hat{\zeta}'_i &= 0, \quad \hat{\nu}'_i = 0 \\ \hat{A}_i = \xi a_i \quad \text{のとき} \quad \hat{A}'_i &= a_i \end{aligned} \quad (5.20a, b)$$

また, Ω_r ($r \leq s$) は指定1次固有値に一致するため

$$\hat{\Omega}'_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (5.21)$$

が成立する。いま, $A_i > \xi a_i$ ($= \bar{A}_i$) が成立する部材の数を m^I とする。このとき, \hat{A}_i ($> \xi a_i$), $\hat{\Phi}_r$ 及び $\hat{\mu}_r$ ($r = 1, 2, \dots, s$) の ξ に関する1階微分係数は, (5.16) ~ (5.19) に対して (5.20a, b) 及び (5.21) を用いることにより,

$$Bx^1 = b_1 \quad (5.22)$$

の形の $f \times s + s + m^I$ 元連立1次方程式を解くことにより求めることができる。ここで, B 及び b_1 はそれぞれ既知の行列及びベクトルであり, x^1 は未知の1階微分係数のベクトルである。 \hat{A}_i の1階微分係数が得られると, $\hat{\Omega}_r$ 及び $\hat{\Phi}_r$ ($r > s$) の1階微分係数は, (5.16) 及び (5.17) を用いて計算することができる。(5.16) ~ (5.21) は必要な階数まで ξ で微分することができ,

$$Bx^k = b_k \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (5.23)$$

の形の連立1次方程式を順次解いて、高階の微分係数まで求めることができる。ここで、 \mathbf{b}_k 及び \mathbf{x}^k は既知のベクトル及び、未知の k 階微分係数のベクトルである。さらに、行列 \mathbf{B} は1階微分係数を求める式 (5.22) の行列と同一である。したがって、1度 \mathbf{B} に対してLU分解を行なうことにより、高階微分係数まで容易に求めることができる。

以上より、次のアルゴリズムを用いて ξ をパラメータとした最適設計解順序集合を生成することができる。

[Step 1] 全部材の断面積が最小断面積制限値で定まる設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} = \xi^u \mathbf{a}$ を考える。ここで、 ξ^u は、設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ の1次固有値が指定値 Ω_a に一致するように定めるものとする。この設計解は、断面積をそれ以上減少させることができないので、明らかに $\xi = \xi^u$ に対応する Problem TOTF の最適設計解である。

[Step 2] (5.12) を用いて $\hat{\zeta}_i(\xi^u)/L_i$ を計算し、その値が最大となっている部材を第1部材とする。すなわち、第1部材以外の部材に対して $\hat{\zeta}_1(\xi^u)/L_1 > \hat{\zeta}_i(\xi^u)/L_i$ が成立するものとする。ここでは、手法の説明の便宜上、 $\hat{\zeta}_i(\xi^u)/L_i$ は1つの部材で最大値をとるものとする。 $\hat{\mu}_1(\xi^u)$ の値は $\hat{\zeta}_1(\xi^u) = L_1$ が成立するように決定する。(5.20a, b) より、第1部材では $\hat{\zeta}'_i = 0$ が成立し、他の部材では $\hat{A}'_i = a_i$ であるから、連立1次方程式を解くことにより \hat{A}'_1 、 $\hat{\mu}'_1$ 及び $\hat{\Phi}'_1$ を求めることができる。さらに、必要ならば高階の微分係数まで求めることができ、以下のテイラー展開式を得る。

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(\xi) &= \hat{A}_1(\xi^u) + \hat{A}'_1(\xi^u)(\xi - \xi^u) + \frac{1}{2}\hat{A}''_1(\xi^u)(\xi - \xi^u)^2 + \cdots \\ \hat{\mu}_1(\xi) &= \hat{\mu}_1(\xi^u) + \hat{\mu}'_1(\xi^u)(\xi - \xi^u) + \frac{1}{2}\hat{\mu}''_1(\xi^u)(\xi - \xi^u)^2 + \cdots \\ \hat{\Phi}_1(\xi) &= \hat{\Phi}_1(\xi^u) + \hat{\Phi}'_1(\xi^u)(\xi - \xi^u) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}''_1(\xi^u)(\xi - \xi^u)^2 + \cdots\end{aligned}\quad (5.24a \sim c)$$

$\hat{\zeta}_i$ に対しても同様のテイラー展開式を得ることができるが、ここでは誤差を少なくするため、 $\hat{\zeta}_i$ の値は (5.24b, c) で得られた $\hat{\mu}_1$ 及び $\hat{\Phi}_1$ を、(5.12) に代入することにより計算する。 $s+1$ 次以上の固有値及び固有モードの微分係数は、すでに得られた \hat{A}'_i を (5.16) 及び (5.17) に代入し、連立1次方程式を解いて求める。

[Step 3] ξ を ξ^u から減少させ、次の条件の1つが満たされると連立1次方程式を再構成し、微分係数を修正する。

- TPC 1** $\hat{\zeta}_i < L_i$ であった部材で $\hat{\zeta}_i = L_i$ が成立する。
- TPC 2** $\hat{A}_i > \bar{A}_i$ であった部材で $\hat{A}_i = \bar{A}_i$ が成立する。
- TPC 3** $\hat{\Omega}_r$ ($r > s$) が Ω_a に一致する。このとき $\hat{\mu}_{s+1} = 0$ であり、 s は1つ増加して、以後 $\hat{\mu}_s$ も未知数となる。
- TPC 4** 1つの区間での ξ の減少量が、あらかじめ定められた上限値 $\Delta\xi$ に一致する。

2.4 節では、Problem OP1 において、目的関数がパラメター ξ の非減少関数であることを示した。Problem TOTF と Problem OP1 を比較すると、(2.59) より

$$\hat{V}' = \sum_{i=1}^m (\nu_i a_i) \quad (5.25)$$

を得る。ここで、(5.9a, b) より、 $A_i > \bar{A}_i$ である部材では $\nu_i = 0$ であることを用いた。ところで、(5.9a, b) を用いると $\nu_i \geq 0$ であるから、(5.25) より

$$\hat{V}' \geq 0 \quad (5.26)$$

が成立する。したがって、 \hat{V} は ξ の非減少関数であり、 $\xi \rightarrow 0$ に対応する最適設計解を求めることにより ξ に関しても目的関数を最小にするような大域最適設計解が得られる。ここで、(5.26) の等号は、すべての部材において $A_i > \bar{A}_i$ 及び $\nu_i = 0$ が成立する場合に成り立つ。その場合には、最小断面積制限値は最適設計解に対して何の影響も及ぼさず、 $\xi \rightarrow 0$ としても断面積が 0 となる部材は存在しない。このような状況は静定トラスに対して考えられるものであり、そのようなトラスに対しては、最適部材配置を求めること自体が無意味である。(5.25) の右辺の量は全て有界であるから、 \hat{V}' は有界である。また、(5.4) より

$$\hat{V}' = \sum_{i=1}^m (\hat{A}'_i L_i) \quad (5.27)$$

であるから、 \hat{A}'_i も有界であるものと考えられる。

5.3 ピン接合平面トラスの最適部材配置生成法

5.2 節では、最適設計解順序集合を ξ に関する区分的テイラー展開手法で求めることができ、 $\xi \rightarrow 0$ とすることにより、 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ に対応する大域最適設計解が得られることを示した。したがって、 ξ を 0 まで減少させる過程が何の困難もなく実行でき、断面積が存在しない部材を取り除くことができれば、最適部材配置トラスを求めることができる。この最適部材配置トラスは、5.2 節で示したように、すべての最小断面積制限値に対応する最適設計問題に対する最適設計解の中で、目的関数を最小にするような設計解である。しかし、静的外力が作用したときの、応力に関する制約を有するトラスの最適部材配置を求める問題において、最適部材配置及びそれに対応する部材断面積集合(最適部材配置トラス)は、存在しない部材では応力制約条件は満たされなくても良いという事実に起因して、最適設計問題の許容設計解集合外部の設計解(孤立解)となることが文献 [8] に示されている。したがって、応力に関する制約条件を有する問題では、存在可能な部材を与えて最適設計問題を定式化し、後に不要部材を取り除くという方法では、最適部材配置を得ることはできない。本節では、5.2 節で得られた最適性条件が、大域最適性の必要十分条件であることを用いて、最小断面積制限値を連続的に減少させることにより、最適部材配置トラスが得られることを示す。

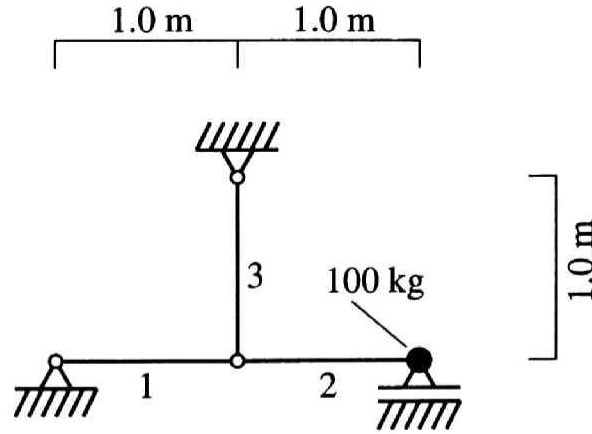


図 5.1 3 部材平面トラス (タイプ 1)

ξ を減少させ、非常に小さい値となったときに生じる種々の困難点について説明するため、2つの単純な3部材平面トラスについて、 ξ の変化にともなう2次以上の固有値の変化を詳細に検討する。トラスの部材の材料は、弾性係数 $E = 205.8 \text{ GPa}$ 、単位体積あたり質量 $\rho = 7.86 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ の鋼材とする。また、全ての計算を解析的に行なうため、部材質量の評価には集中質量行列を用いる。さらに、 a_i は全部材に対して 1.0 cm^2 とする。

図 5.1 のような3部材平面トラスを考える。図 5.1 に示す第2部材と第3部材の断面積は等しい値 A^d をとるものとする。このとき、 A^d に対する最適性条件において、(5.11) は

$$L^d - \zeta^d - \nu^d = 0 \quad (5.28)$$

のようになる。ここで、

$$\begin{aligned} L^d &= L_1 + L_2 \\ \zeta^d &= \zeta_1 + \zeta_2 \end{aligned} \quad (5.29a, b)$$

であり、 ν^d はラグランジュ乗数である。この仮定により、5.2節のテイラー展開手法を用いずに、種々の ξ の値に対応する最適設計解を容易に求めることができる。 $\xi = \xi^u = 1.0$ に対応する1次及び2次固有値は、それぞれ $1.0220 \times 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $1.7455 \times 10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。そこで、指定1次固有値 Ω_a には、 $1.0220 \times 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ が与えられているものとする。1次固有モードは、第1部材と第2部材が軸方向に変形するモードであり、第3部材の変形は微小であるため、直観的に明らかなように ξ を ξ^u から減少させると A_3 が減少する。 ξ を $\xi^m = 0.39069 \times 10^{-2}$ まで減少させたとき、 $A_1 = A_2 = 0.99902 \text{ cm}^2$ 、 $A_3 = 0.39069 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ であり、 Ω_2 が Ω_1 に一致した。ここで、2次固有モードは第3部材が軸方向に変形するモードであり、第3部材で第1部材及び第2部材による慣性力を支えている。

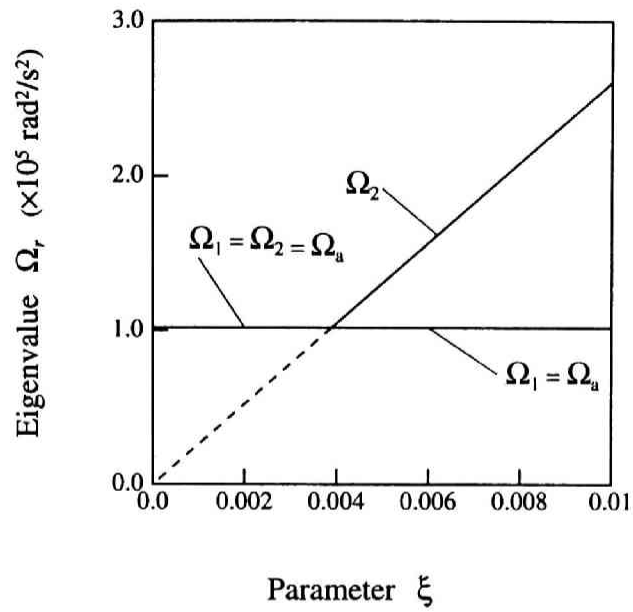


図 5.2 3 部材平面トラス (タイプ 1) の最適設計解順序集合における ξ と固有値の関係

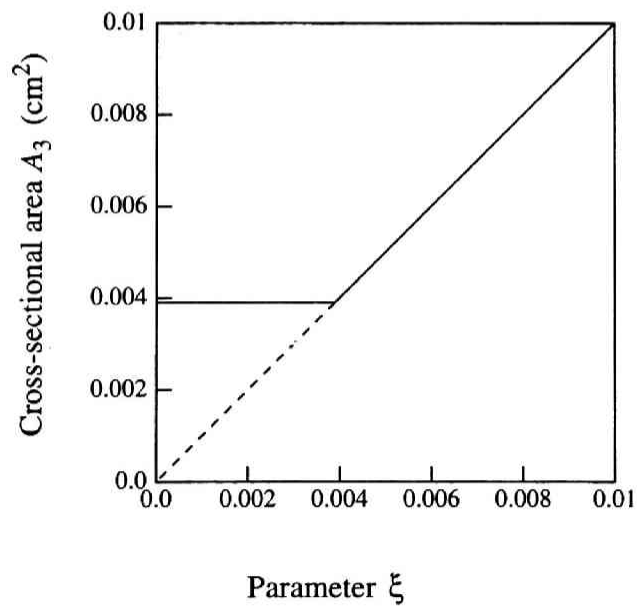


図 5.3 3 部材平面トラス (タイプ 1) の最適設計解順序集合における ξ と第 3 部材の断面積の関係

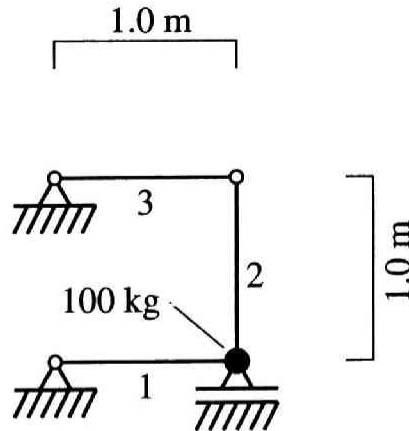


図 5.4 3 部材平面トラス (タイプ 2)

固有値及び第 3 部材の断面積と ξ の関係を、 ξ の非常に小さい値の領域について、図 5.2 及び図 5.3 にそれぞれ示す。 ξ を ξ^m から減少させたとき、 Ω_a 以下の固有値が存在することはできないので、 A_3 は $0.39069 \times 10^{-2} \text{ cm}^2$ から減少することはできない。したがって、 $0 \leq \xi < \xi^m$ では、最適設計解において $A_i > \bar{A}_i$ が全部材に対して成立し、 $\bar{\mathbf{A}} = \xi^m \mathbf{a}$ に対応する最適設計解は $0 \leq \xi \leq \xi^m$ に対応する大域最適設計解となる。

これらの結果より、図 5.1 のトラスでは、 $\xi \rightarrow 0$ とすると、その最適設計解において 1 次固有値は重複し、非常に小さい断面積の部材が存在することがわかる。ここで、この「理論的最適部材配置トラス」には全ての存在可能部材が含まれ、トポロジーは最適化されていないことに注目すべきである。そこで、 $0 \leq \xi \leq \xi^m$ に対しては、図 5.2 及び図 5.3 の点線で示したように、 $\xi = \xi^m$ での ξ に関する微分係数を用いて外挿した解を用いることにすると、 $\xi = 0$ に対する設計解 \mathbf{A}^0 において第 3 部材の断面積が 0 となり、 \mathbf{A}^0 は不安定なトラスとなる。 \mathbf{A}^0 の 1 次及び 2 次固有値は、それぞれ 0 及び $1.0220 \times 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ ($= \Omega_a$) である。1 次固有値 Ω_1 が 0 のとき、(5.5) の右辺は 0 となり、 Φ_1 は外力が存在することなく変形可能なモードである。このとき、剛性行列 \mathbf{K} の行列式の値は 0 であり、トラスは不安定となる。この不安定なトラスは、第 1 部材と第 2 部材の間のヒンジを固定して、1 つの長い部材とすることにより安定化することができる。このようにして得られたトラスを「実用的最適部材配置トラス」と定義する。 $\xi \rightarrow 0$ とする過程は、不必要なヒンジを検出する手法であるとも考えることもできる。

次に、図 5.4 のような 3 部材平面トラスを考える。 $\xi = \xi^u = 1.0$ に対応する 1 次及び 2 次固有値は、それぞれ $2.0420 \times 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $2.6183 \times 10^7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。そこで、指定 1 次固有値 Ω_a は $2.0420 \times 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ とした。1 次固有モードは第 1 部材が軸方向に変形するモードであり、第 2 部材及び第 3 部材は軸方向にほとんど変形しない。したがって、 ξ を ξ^u から減少させると A_2 と A_3 が最小断面積制限値に一致して減少し、 A_1 はほとんど変化しない。この例では Ω_2 は減少せず、 ξ は何の困難もなく 0 まで減少させることができる。 $\xi = 0$ に対応する最

適設計解において、 $A_2 = A_3 = 0$ であり、第 2 部材と第 3 部材の接合部の節点は取り除かれ、1 つの部材からなる最適部材配置トラスを生成することができる。

大規模トラスでは、理論的最適部材配置トラスにおいて 1 次固有値の重複度は大きくなり、非常に小さい断面積の 2 次的部材からなる網状トラスが存在するものと予想される。設計者は、そのような、理論的ではあるが非実用的な最適部材配置トラスを得ることを目的としないであろう。したがって、以下のような、実用的最適部材配置トラスを生成する手法が有意義である。

[Step 1] 設計 $A = \xi^u a$ の 1 次固有値が指定値 Ω_a に一致するように ξ^u を決定する。このとき、設計 $A = \bar{A} = \xi^u a$ は、 $\bar{A} = \xi^u a$ が与えられた場合の Problem TOTF の自明な最適設計解である。

[Step 2] ξ を ξ^u から減少させ、 ξ に関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解の順序集合を求める。

[Step 3] ξ が適当な小さい値 ξ^m に達すると、 $0 \leq \xi \leq \xi^m$ に対する最適設計解を、 $\xi = \xi^m$ での ξ に関する微分係数を用いて外挿し、 $\xi = 0$ に対応する設計解 A^0 を求める。ここで、 $\xi > \xi^m$ の領域で 1 次固有値が重複する場合には、1 次固有値が重複することを考慮に入れた最適性条件を用いる。

[Step 4] 設計解 A^0 に対し、断面積が 0 である部材を取り除く。もしそのトラスが不安定であれば、不安定なヒンジを固定し、安定な実用的最適部材配置トラスを得る。5.2 節で示したように、 \hat{V} の 1 階微分係数 \hat{V}' は有界であるから、 $\hat{V}(0)$ と $V(A^0)$ の差は十分小さいものと考えられる。

5.4 剛接合立体トラスの最適部材配置生成法

5.3 節で示した不安定性にともなう困難点は、節点がピン接合であることに起因するものである。さらに、立体トラスでは、1 つの節点に 2 つの部材が直線的に接続することによる不安定性に加えて、2 つ以上の部材が 1 つの平面内に存在することによる不安定性も考慮しなければならない。したがって、立体トラスでは、5.3 節に示したような、ヒンジを固定して長い部材を生成する手法だけでは安定化することはできない。実際のトラスの節点は理想的なピン接合ではなく、また、完全に剛接合として設計されることも多いことから、剛接合立体トラスの最適部材配置を求めることの実用上の意義は大きい。

図 5.5 のような円筒形部材で構成された剛接合立体トラスを考える。また、部材の軸方向変形及び曲げ変形は、それぞれ材端変位の 1 次及び 3 次関数で近似する。さらに、部材内の材軸まわりのねじれ変形は、材端の材軸まわりの変位角の 1 次関数で表現する。円筒の外側面及び内側面の半径を

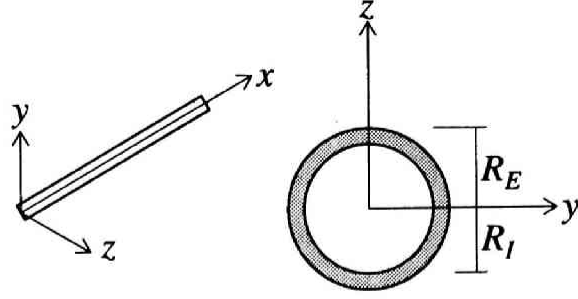


図 5.5 円筒部材の座標系及び部材断面

それぞれ R_E 及び R_I で表わす。このとき、断面積 A^R ， y 軸と z 軸に関する断面 2 次モーメント I^B 及び x 軸に関する断面極 2 次モーメント I^P は R_E と R_I を用いて

$$\begin{aligned} A^R &= \pi(R_E^2 - R_I^2) \\ I^B &= \frac{\pi}{4}(R_E^4 - R_I^4) \\ I^P &= \frac{\pi}{2}(R_E^4 - R_I^4) \end{aligned} \quad (5.30a \sim c)$$

で表わされる。いま、円筒の厚さ $R_E - R_I$ が R_E に比べて十分小さいものとする、
(5.30a ~ c) より、

$$\begin{aligned} A^R &= \pi\{2R_E - (R_E - R_I)\}(R_E - R_I) \\ &\simeq 2\pi R_E(R_E - R_I) \\ I^B &= \frac{\pi}{4}[R_E^2 + \{R_E - (R_E - R_I)\}^2]\{2R_E - (R_E - R_I)\}(R_E - R_I) \\ &\simeq \pi R_E^3(R_E - R_I) \\ I^P &= \frac{\pi}{2}[R_E^2 + \{R_E - (R_E - R_I)\}^2]\{2R_E - (R_E - R_I)\}(R_E - R_I) \\ &\simeq 2\pi R_E^3(R_E - R_I) \end{aligned} \quad (5.31a \sim c)$$

を得る。ゆえに、(5.31a ~ c) より

$$\begin{aligned} I^R &= \frac{1}{2}R_E^2 A^R \\ I^P &= R_E^2 A^R \end{aligned} \quad (5.32a, b)$$

が成立する。以上より、 $R_E \gg (R_E - R_I)$ のときには、 I^B 及び I^P は A^R に比例するものと考えることができる。したがって、系剛性行列の各成分は部材断面積の線形関数となり、ピン接合の場合と同様に、最適性条件 (5.8) ~ (5.10a, b) は大域最適性の必要十分条件である。5.5 節の例題では、この近似を用い、外径 R_E は定数としている。ところで、 R_E を指定せずに、

$$I^B = cA^R \quad (5.33)$$

で定義される比例係数 c を指定することも可能である。このとき、(5.30a, b) より明らかに

$$I^P = 2cA^R \quad (5.34)$$

及び

$$c = \frac{1}{4}(R_E^2 + R_I^2) \quad (5.35)$$

が成立する。ゆえに、(5.30a) 及び (5.35) より

$$\begin{aligned} R_E &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(4c + \frac{A^R}{\pi} \right)} \\ R_I &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(4c - \frac{A^R}{\pi} \right)} \end{aligned} \quad (5.36a, b)$$

が成り立ち、(5.36a, b) を用いて R_E 及び R_I を求めることができる。例題では R_E をあらかじめ指定し、(5.32a, b) の関係を用いているが、(5.32a) 及び (5.33) より得られる

$$c = \frac{1}{2}R_E^2 \quad (5.37)$$

の関係を用いることにより、比例係数 c が指定された場合に変換することができる。

後の例題で示すように、剛接合立体トラスでは、ピン接合平面トラスでみられたような不安定性は存在せず、何の困難もなく ξ を 0 にまで減少させ、最適部材配置トラスを求めることができる。

5.5 例題

5.2 節及び 5.3 節のアルゴリズムに基づきプログラムを作成し、種々のピン接合平面トラスに対し実用的最適部材配置トラスを求め、その特性を明らかにする。さらに、種々の剛接合平面及び立体トラスに対して最適部材配置トラスを求め、ピン接合トラスに見られるような不安定性が存在しないことを明らかにする。以下の例題で、部材の材料は $E = 205.8 \text{ GPa}$, $\rho = 7.86 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ 及びポアソン比 0.3 の鋼材である。部材質量行列にはコンシステント質量行列を用い、 a_i は簡単のため全部材に対して 1.0 cm^2 とする。いくつかの例題に示した CPU 時間は FACOM VP/200 での値である。 $\Delta\xi$ の値は、1 次固有値が重複しない領域では 0.05 , 1 次固有値が重複する領域では 0.01 とした。また、テイラー展開式において、2 階の微分係数まで考慮した。

36 節点正方形平面トラス

本章で展開した理論及びプログラムの検証のため、図 5.6 のような 36 節点正方形平面トラスに対して最適部材配置トラスを求め、その特性について詳細な考察を行なう。

まず、節点 N_1^6 に $q = 1000.0 \text{ kg}$ の非構造集中質量が存在する場合 PS1 に対して、最適部材配置トラスを求めた。この場合、非構造質量は $\xi = \xi^u = 1.0$ の初期設計解の全部材質量 205.48 kg の 5 倍程度である。指定 1 次固有値は $1568.1 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。得られた不安定な最適部材配置トラス \mathbf{A}^0 を図 5.7 に示す。この図は、部材幅が断面積に比例するように描いたものである。図 5.7 に部材番号を示した部材の断面積を表 5.1 に示す。設計解 \mathbf{A}^0 の全部材体積 $V(\mathbf{A}^0)$ の、初期設計解 $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ の全部材体積 $V(\mathbf{a})$ に対する比 τ の値は 0.29358 である。したがって、全部材において一定の断面積を有するトラスと比べて、最適部材配置トラスを求めることにより、約 70% の部材体積を減少させることが可能である。また、CPU 時間は 8.23 s であった。この不安定なトラスに対して固有値解析を行なった結果、8 個の固有モードに対応する固有値が 0 となった。図 5.7 より明らかなように、不安定な 10 部材トラスは、直線状に接続する 2 つの部材の接点である、8 個のヒンジを固定することにより安定化することができ、得られた 2 つの長い部材からなるトラスが実用的最適部材配置トラスである。この例のように、集中質量の存在する 1 つの節点と支点を結ぶ直線上に、部材が存在することが可能である場合には、その直線上に存在する部材のみで構成されるトラスが形成され、集中質量による慣性力は直接支点に伝達される。また、この例では、理論的最適部材配置トラスを求めたならば、1 次固有値の重複度は 8 となり、10 個の主要部材の間に、非常に小さい断面積の 2 次的部材からなる網状トラスが形成されるものと予想される。

節点 N_1^6 に存在する集中質量 q が $1.0 \times 10^5 \text{ kg}$ のときには、テイラー展開で得られた不安定なトラス \mathbf{A}^0 の部材配置は図 5.7 のトラスと同一であり、部材断面積は表 5.2 に示したとおりである。表 5.1 及び表 5.2 より、集中質量の値が大きく異なっても、最適部材配置トラスの部材断面積はほとんど変わらないことがわかる。

次に、 $1.0 \times 10^5 \text{ kg}$ の集中質量が節点 N_2^6 及び N_3^6 にそれぞれ存在する場合 PS2 及び PS3 を考える。 Ω_a の値は、PS2 及び PS3 に対してそれぞれ $21.971 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $25.093 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。得られた不安定なトラス \mathbf{A}^0 を図 5.8 及び図 5.9 に示す。図 5.8 及び図 5.9 より、PS2 及び PS3 の最適部材配置トラスは PS1 の場合と比べて複雑であるが、1 つの集中質量による慣性力を、可能な限り長い部材により直接的に支点に伝達するような部材配置となっていることがうかがわれる。PS2 及び PS3 それぞれについて、3 個及び 6 個の固有値が 0 であり、これらのトラスはヒンジを固定することにより安定化できる。

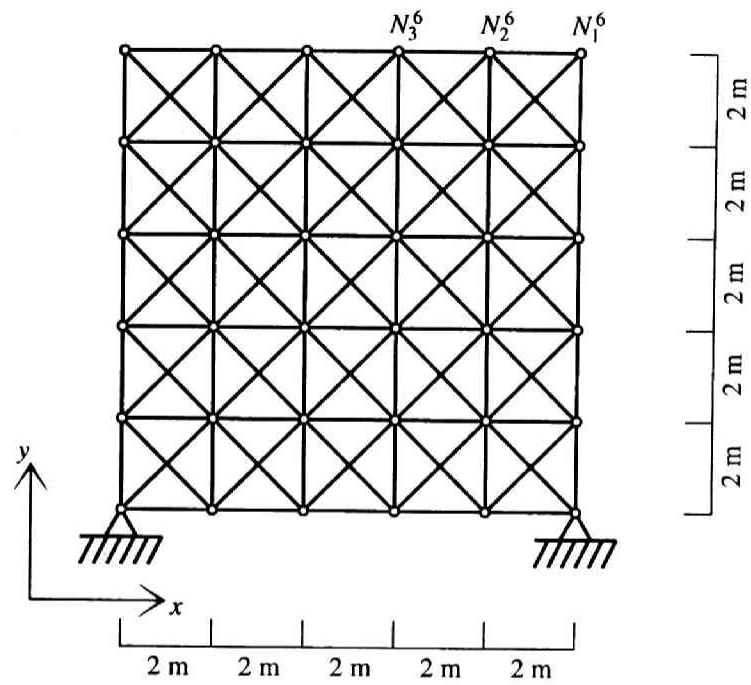


図 5.6 36 節点正方形平面トラス

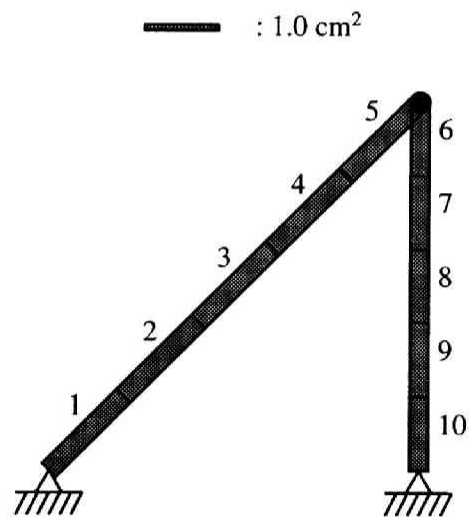


図 5.7 36 節点正方形平面トラス (PS1) の最適部材配置トラス

表 5.1 36 節点平面トラス (PS1, $q = 1000.0 \text{ kg}$) の最適部材配置における部材断面積

部材番号	1	2	3	4	5
断面積 (cm^2)	3.2937	3.2930	3.2816	3.2545	3.2006
	6	7	8	9	10
	3.0012	3.0370	3.0643	3.0852	3.0973

表 5.2 36 節点平面トラス (PS1, $q = 1.0 \times 10^5 \text{ kg}$) の最適部材配置における部材断面積

部材番号	1	2	3	4	5
断面積 (cm^2)	3.2993	3.2996	3.3010	3.3028	3.3041
	6	7	8	9	10
	3.1031	3.1112	3.1117	3.1141	3.1143

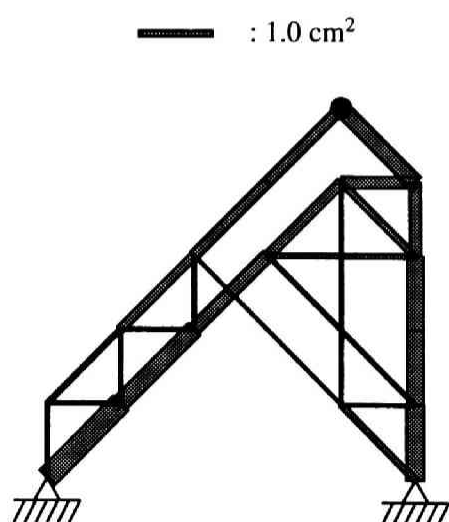


図 5.8 36 節点正方形平面トラス (PS2) の最適部材配置トラス

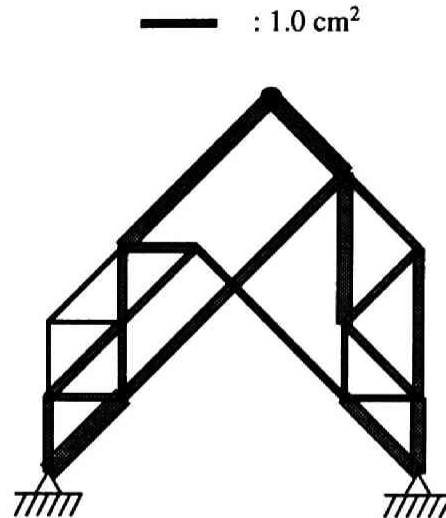


図 5.9 36 節点正方形平面トラス (PS3) の最適部材配置トラス

長方形平面トラス

最適部材配置への、節点位置及び存在可能部材配置の影響について考察するため、図 5.10 のような 10×4 分割の 55 節点長方形平面トラスに対して最適部材配置トラスを求めた。ここで、スパン W と高さ H はそれぞれ 20.0 m 及び 4.0 m である。

まず、下辺の各節点に 1000.0 kg の集中質量が存在する場合 PR1 に対して最適部材配置トラスを求めた。指定 1 次固有値は $456.06 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。得られた不安定な最適部材配置トラス A^0 を図 5.11 に示す。また、パラメータ ξ と全部材体積 \hat{V} の関係を図 5.12 に示す。図 5.12 より、5.3 節で示したように、 \hat{V} は ξ の非減少関数であることがわかる。 ξ と $\hat{\Omega}_2$ の関係を図 5.13 に示す。この例では ξ の十分大きい値で 1 次固有値が重複したため、1 次固有値が重複する場合の最適性必要十分条件を用いてテイラー展開を行なった。図 5.11 のトラスに対して固有値解析を行なった結果、10 個の固有値が 0 であった。 Ω_{11} 及び Ω_{12} は、それぞれ $455.92 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $456.02 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、ともに指定 1 次固有値に十分近い値である。固有値解析で得られる 1 次固有値と指定 1 次固有値の間の誤差は、テイラー展開において高階の微分係数まで採用すること、あるいは ξ の許容最大減少値 $\Delta\xi$ を小さくすることにより減少させることができる。しかし、その場合 CPU 時間は増加することになる。ゆえに、ここでは上記の誤差は実用上許容できるものとした。 τ の値は 0.37824 であり、CPU 時間は 69.89 s であった。図 5.11 のトラスでは、直線的に接続する 10 組の部材の接点である 10 個のヒンジが存在するため、それらのヒンジを固定することにより、安定な最適部材配置トラスが得られる。図 5.11 より、支点から斜材の方向へ剛な部材 (N_1^{11}, N_3^{11}) 及び (N_2^{11}, N_4^{11}) が存在し、全体として剛な台形状のアーチが形成されていることがわかる。下辺に存在する集中質量による慣性力は、そのアーチを介して支点到伝達される。

次に、1000.0 kg の集中質量が、図 5.10 の節点 N_1^{10} に存在する場合 PR2 に対して最適部材配置トラスを求めた。得られた最適部材配置トラスを図 5.14 に示す。ここで、指定 1 次固有値は

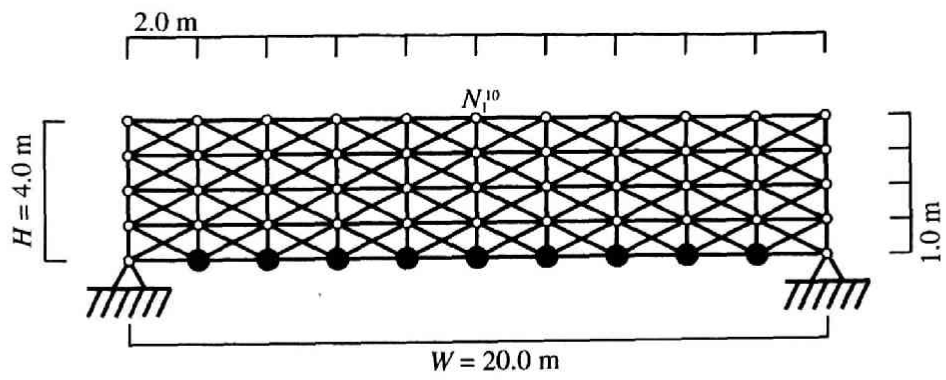


図 5.10 55 節点長方形平面トラス

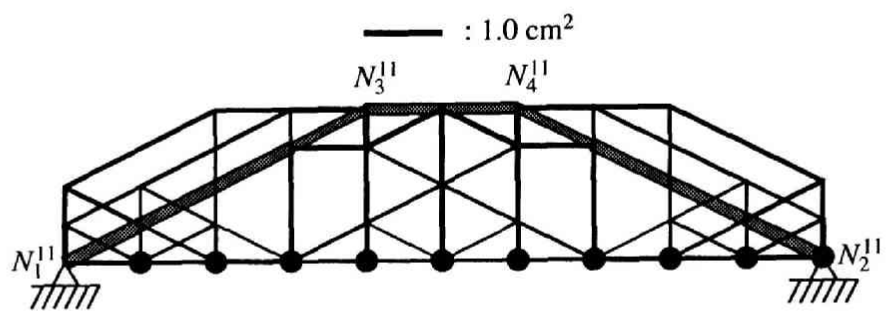


図 5.11 55 節点長方形平面トラス (PR1) の最適部材配置トラス

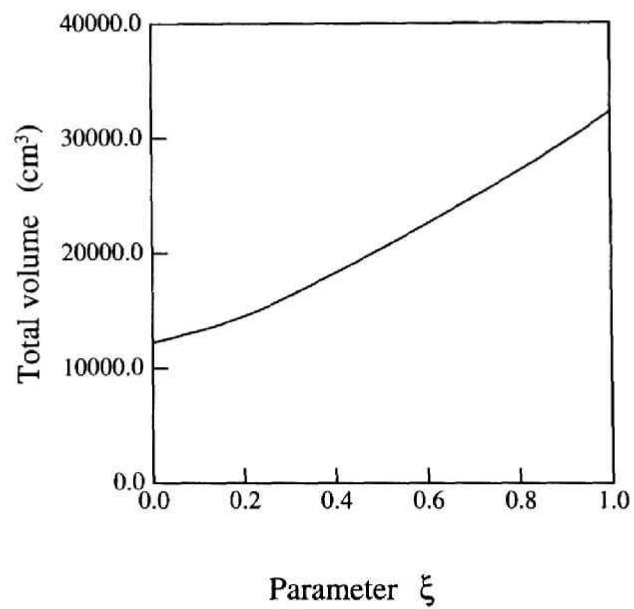


図 5.12 55 節点長方形平面トラス (PR1) の最適設計解順序集合における
 ξ と全部材質量の関係

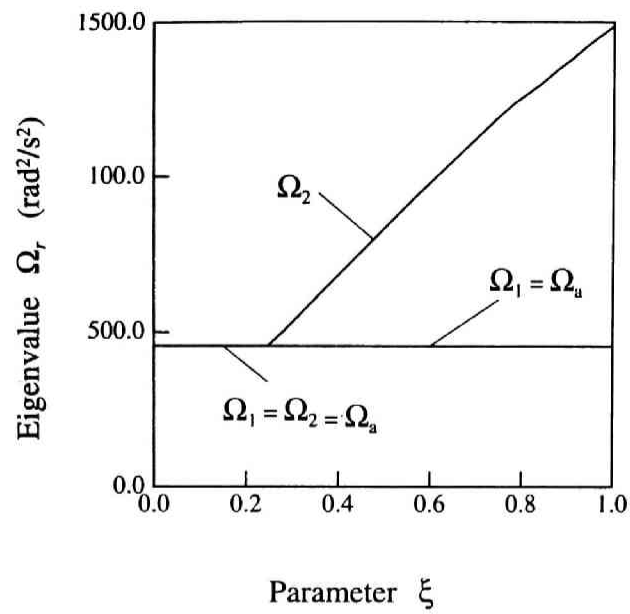


図 5.13 55 節点長方形平面トラス (PR1) の最適設計解順序集合における ξ と 2 次固有値の関係

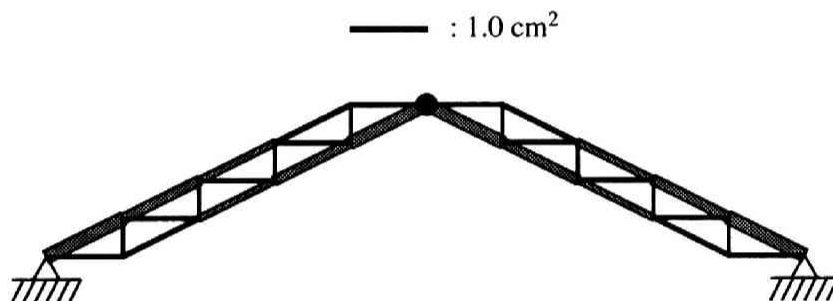


図 5.14 55 節点長方形平面トラス (PR2) の最適部材配置トラス

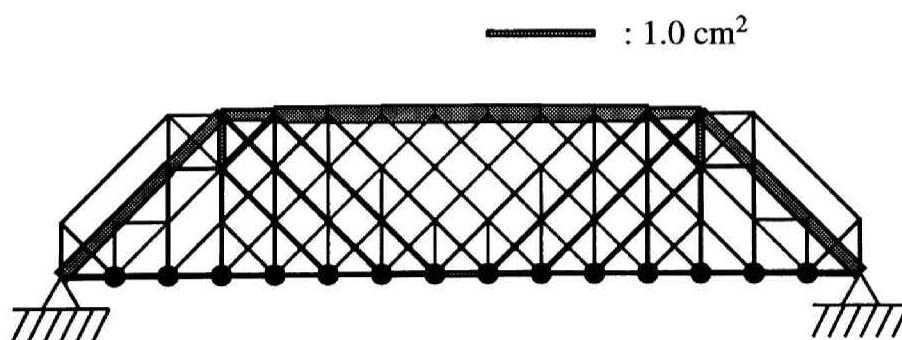


図 5.15 64 節点長方形平面トラスの最適部材配置トラス

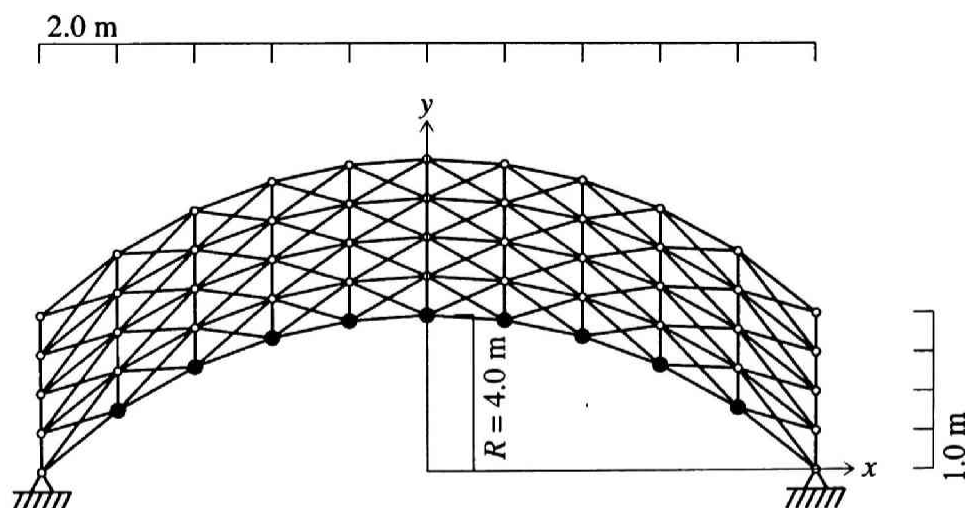


図 5.16 55 節点アーチ状平面トラス

$1901.1 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。図 5.14 のトラスに対して固有値解析を行なった結果、このトラスは安定であり、1 次固有値は $1900.7 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であった。ゆえに、この場合には安定化を行なうことなく、最適部材配置トラスが得られた。

さらに、分割数が 15×3 で、 $W = 15.0 \text{ m}$ 、 $H = 3.0 \text{ m}$ の 64 節点長方形平面トラスに対して最適部材配置トラスを求めた。1000.0 kg の集中質量を下辺の節点に与える。指定 1 次固有値は $353.50 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。不安定な最適部材配置トラスを図 5.15 に示す。このトラスは、斜材に存在するヒンジを固定することにより安定化できる。図 5.11 及び図 5.15 より、斜材の水平軸からの傾きにかかわらず、最適部材配置トラスでは、支点から斜材の方向に剛な部材が形成されることがわかる。また、図 5.15 の最適部材配置トラスのように、中央部の領域が十分に広ければ、下辺中央付近の節点の集中質量による慣性力は、斜材の方向に伝達されることがわかる。

55 節点アーチ状平面トラス

長方形平面トラスでみられたような、アーチが形成される特性について検討するため、図 5.16 のようなアーチ状平面トラスに対して最適部材配置トラスを求めた。図 5.16 において、各アーチは半径 14.5 m の円弧で形成され、各アーチのライズは 4.0 m である。また、アーチの間隔は 1.0 m である。下辺のアーチ上の節点に 1000.0 kg の集中質量を与える。 $\xi^u = 1.0$ に対応する指定 1 次固有値は $459.12 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。初期設計解ににおいて、1 次固有モードは y 軸に関して対称なモード、2 次固有モードは y 軸に関して逆対称なモードである。不安定な実用的最適部材配置トラス A^0 を図 5.17 に示す。図 5.17 のトラスで、低次の 4 個の固有値は 0 である。 Ω_5 及び Ω_6 はそれぞれ $458.89 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ 及び $459.15 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ であり、ともに指定 1 次固有値とほぼ一致している。このトラスは 4 個のヒンジを固定することにより安定化できる。 τ

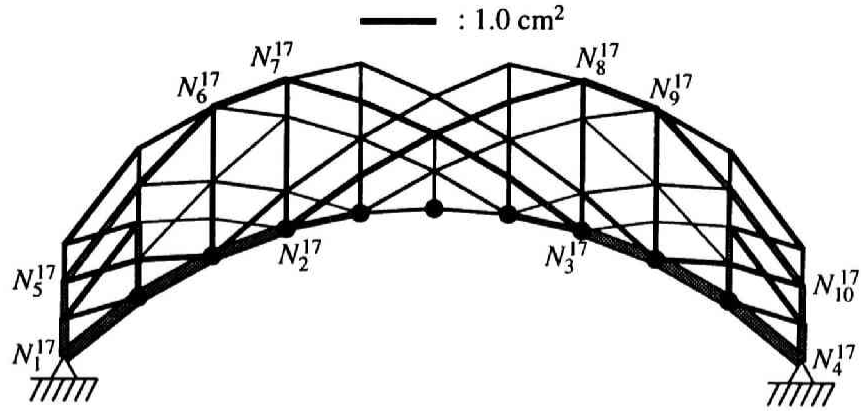


図 5.17 55 節点アーチ状平面トラス ($R = 4.0$ m) の最適部材配置トラス

の値は 0.40376 であり, CPU 時間は 52.08 s であった。図 5.17 より, 下辺のアーチ上に 2 組の部分アーチ (N_1^{17}, N_2^{17}) 及び (N_3^{17}, N_4^{17}) が形成され, それらはそれぞれライズの大きいアーチ ($N_5^{17}, N_6^{17}, N_7^{17}, N_8^{17}$) 及び (N_9^{17}, N_{10}^{17}) と接続していることがわかる。

各アーチのライズが 2.0 m のとき, $\xi^u = 1.0$ に対応する Ω_a の値は, $793.11 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。 ξ を減少させることによる最適設計解の変化の様子を知るため, $\xi = 0.82715$ 及び 0.64465 に対応する最適設計解を図 5.18(a,b) にそれぞれ示す。 ξ を ξ^u から減少させる過程で得られるこれらの設計解は, 各 ξ に対応する最適設計解として意味のあるものである。不安定な最適部材配置トラス A^0 を図 5.19 に示す。図 5.19 より, 1 つの剛な部分アーチ (N_1^{19}, N_2^{19}) が上辺のアーチに沿って形成されていることがわかる。ライズをさらに低くすると, 最適部材配置トラスは長方形平面トラスの最適部材配置トラスに近づくものと予想される。

36 節点剛接合正方形平面トラス

図 5.20 に示すような, 剛支持された 36 節点正方形平面トラスに対して最適部材配置トラスを求めた。あらかじめ指定された, 円筒部材の外側面の半径 R_E は 12.5 cm である。節点 N_1^{20} に存在する集中質量は 1000.0 kg である。 $\xi^u = 1.0$ に対応する指定 1 次固有値は $1564.0 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。剛接合トラスでは, ピン接合トラスとは異なり, 何の困難もなく ξ に関する区分的テイラー展開手法により, $\xi = 0$ に対応する最適設計解すなわち最適部材配置トラスを求めることができる。得られた最適部材配置トラスを図 5.21 に示す。図 5.21 のトラスに対して固有値解析を行なった結果, このトラスはピン接合の場合とはことなり, 安定であることが確認できた。図 5.21 のトラスの部材断面積を表 5.3 に示す。ここで, 部材番号は図 5.7 に示したとおりである。表 5.1 及び表 5.3 より, 剛接合の場合の断面積分布には, ピン接合の場合と同様の傾向が見られることがわかる。

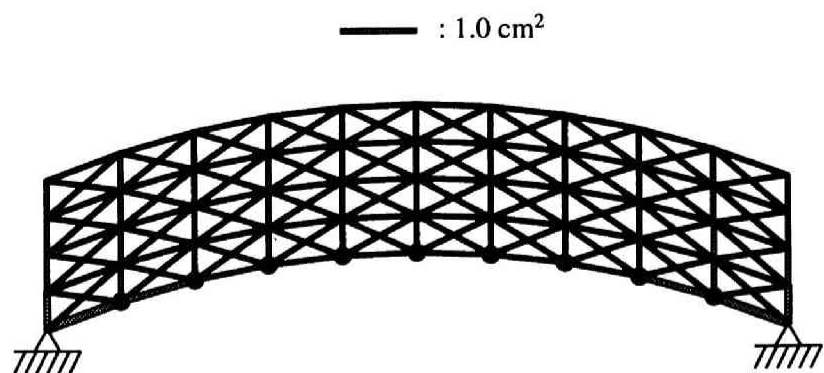


図 5.18(a) 55 節点アーチ状平面トラス ($R = 2.0$ m) の $\xi = 0.75044$ に対する
最適設計解の部材断面積

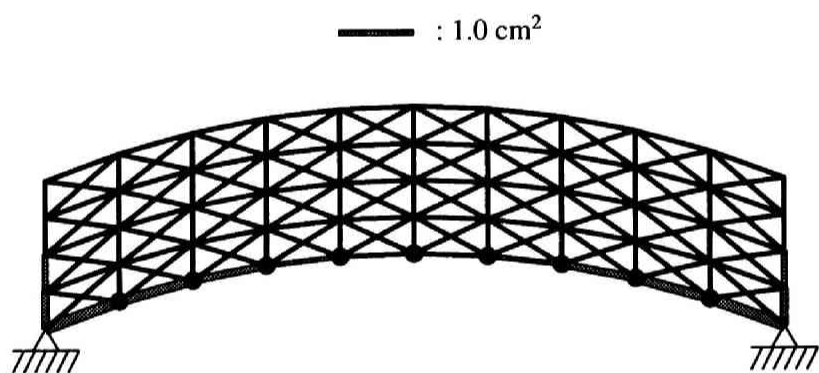


図 5.18(b) 55 節点アーチ状平面トラス ($R = 2.0$ m) の $\xi = 0.37841$ に対する
最適設計解の部材断面積

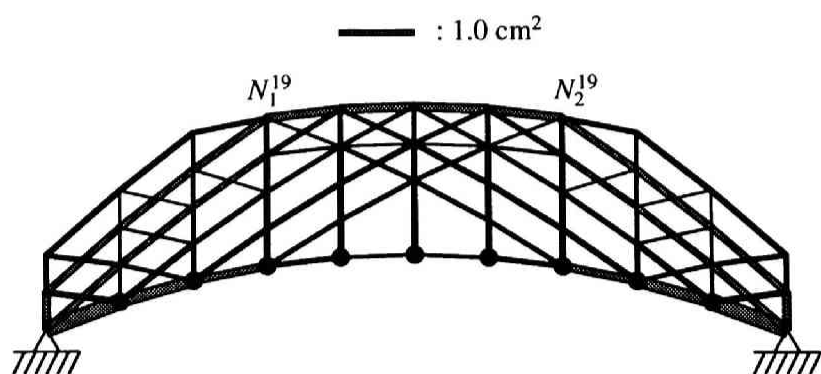


図 5.19 55 節点アーチ状平面トラス ($R = 2.0$ m) の最適部材配置トラス

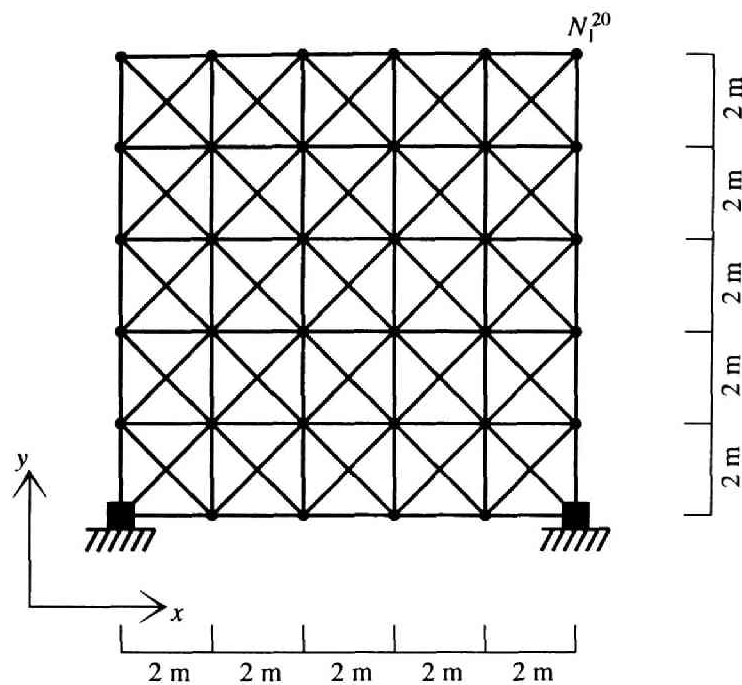


図 5.20 36 節点剛接合正方形平面トラス

—— : 1.0 cm²

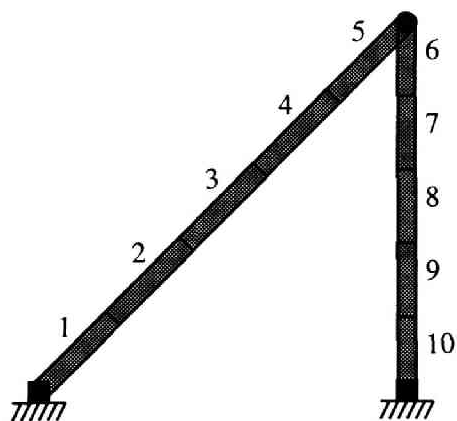


図 5.21 36 節点剛接合正方形平面トラスの最適部材配置トラス

表 5.3 36 節点剛接合平面トラスの最適部材配置における部材断面積

部材番号	1	2	3	4	5
断面積 (cm ²)	3.3308	3.3268	3.3180	3.2858	3.2282
	6	7	8	9	10
	3.0368	3.0704	3.1027	3.1167	3.1615

41 節点剛接合平板状立体トラス

図 5.22 のような剛支持された 41 節点剛接合 2 層平板状立体トラスに対して、最適部材配置トラスを求めた。ここで、 $R_E = 12.5 \text{ cm}$ であり、節点 N_1^{22} に 1000.0 kg の集中質量を与えるものとする。また、 $L^a = 346.41 \text{ cm}$ 、 $L^b = 200.0 \text{ cm}$ であり、斜材と xy 平面のなす角度は 45.0° である。 $\xi^u = 1.0$ に対応する指定 1 次固有値の値は $3229.5 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。 ξ と 3 次以下の固有値の関係を図 5.23 に示す。図 5.23 より、 ξ の十分大きい値で 3 つの固有モードに対応する固有値が重複し、本手法はそのような場合にも容易に適用できることが示された。1 次固有値の重複度が 3 である場合の平板状立体トラスの最適設計解を求めた例は、著者の知る限り他には存在しない。最適部材配置トラスを図 5.24 に示す。ピン接合の場合とは異なり、このトラスは安定である。図 5.24 より、中央部に台形状トラスが形成され、 N_1^{22} の集中質量による慣性力が支点に伝達される様子がうかがわれる。図 5.24 のトラスは一見複雑のように見えるが、最適部材配置トラスに存在する部材の数は 60 であり、存在可能な部材の数 128 と比べて半分以下となっている。

59 節点剛接合平板状立体トラス

図 5.25 のような剛支持された 59 節点剛接合平板状立体トラスに対して、最適部材配置トラスを求めた。ここで、節点 N_1^{25} に 2000.0 kg の集中質量を与えるものとし、部材半径 $R_E = 10.0 \text{ cm}$ である。また、斜材と xy 平面のなす角度は 45.0° である。 $\xi^u = 1.0$ に対応する指定 1 次固有値の値は $1447.3 \text{ rad}^2/\text{s}^2$ である。剛接合トラスでは、節点に回転自由度が存在するため、部材半径が極端に小さいと、1 次固有値はピン接合の場合より小さくなり、半径が十分大きいと、1 次固有値はピン接合の場合より大きな値をとる。この例では、 $R_E = 10.0 \text{ cm}$ ではほぼ同じ値となっている。安定な最適部材配置トラスを図 5.26 に示す。図 5.26 より、上層中央節点の非構造質量による慣性力は、斜材を通じて正方形トラスにより支持されることがわかる。さらに、それらの正方形トラスは、平行四辺形トラスを通じて支点で支持される。

ピン接合の場合でも見られたように、これらの例題において最適部材配置トラスの部材断面積は非常に小さい値となっている。しかし、運動方程式、最適性条件式などからも明らかなように、指定 1 次固有値が定められたとき、最適部材配置トラスの部材断面積は、非構造質量に比例するため、これらの結果は種々の非構造質量を有する場合に対して有効である。

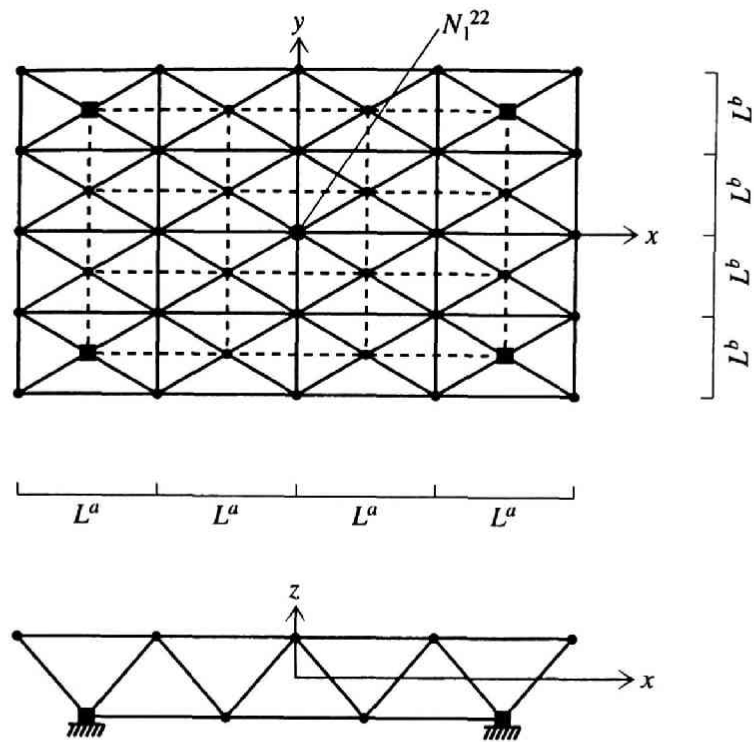


図 5.22 41 節点剛接合平板状立体トラス

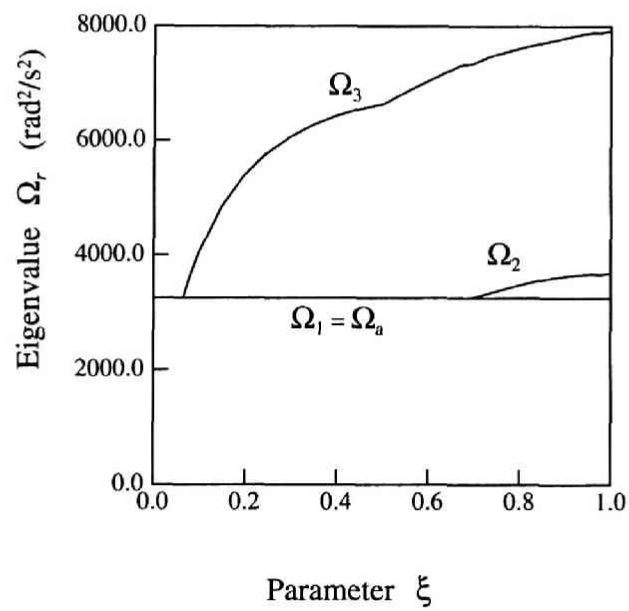


図 5.23 41 節点剛接合平板状立体トラスの最適設計解順序集合における
 ξ と固有値の関係

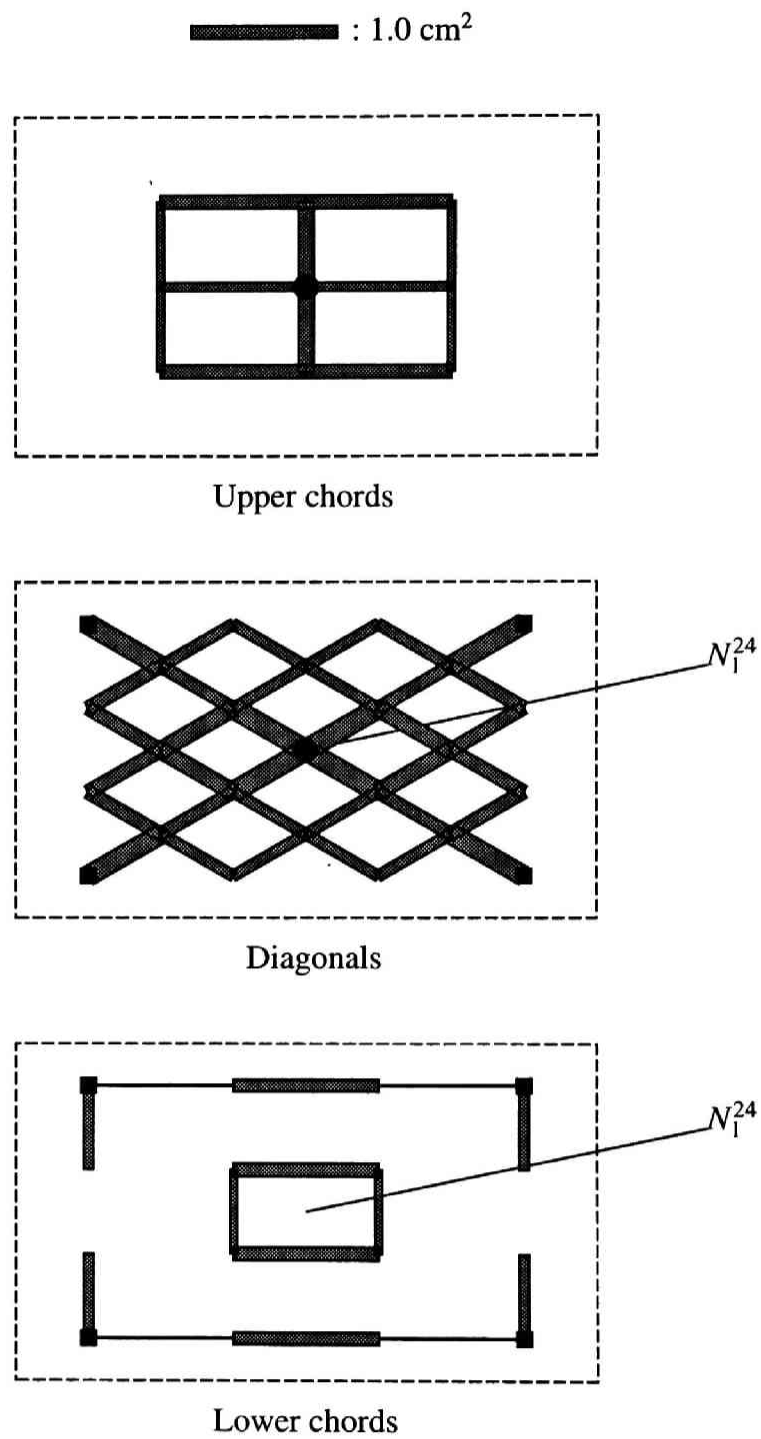


図 5.24 41 節点剛接合平板状立体トラスの最適部材配置トラス

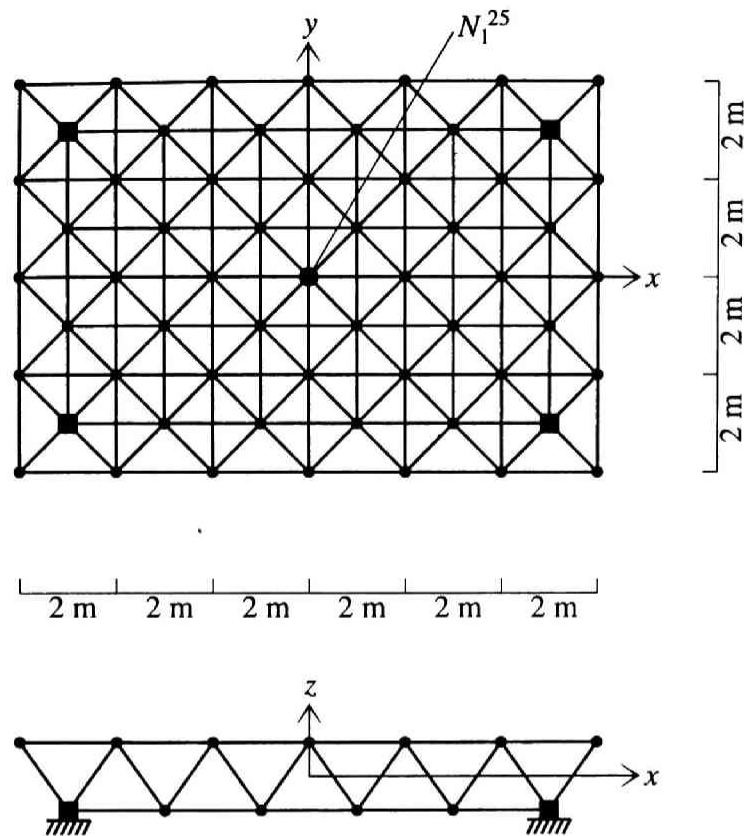


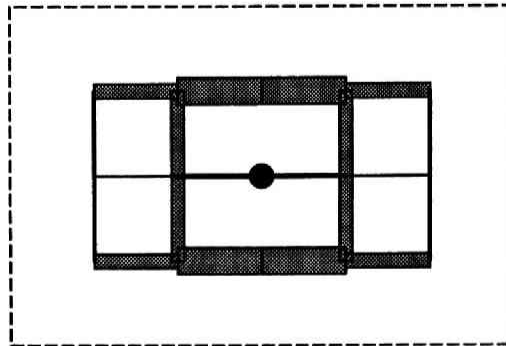
図 5.25 59 節点剛接合平板状立体トラス

5.6 5 章の結論

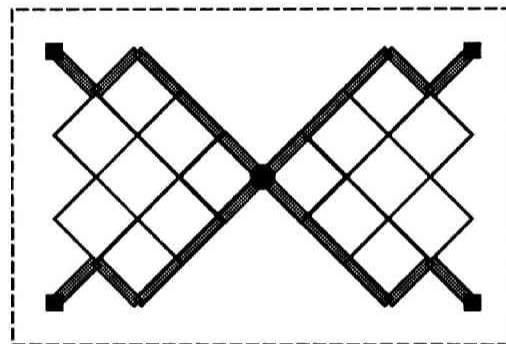
本章で得られた結論は、以下のとおりである。

1. 指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対し、最適設計解を最小断面積制限値を規定するパラメーターの関数と考えることにより、最小断面積制限値をパラメーターとした最適設計解順序集合の概念を新しく導入した。さらに、全部材の断面積が最小断面積制限値に一致するような自明な最適設計解を初期設計解として、上記パラメーターに関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する理論を展開した。
2. 節点位置及び存在可能部材の配置が定められたトラスに対し、1. の手法に基づき最小断面積制限値を 0 まで減少させることにより、不要な部材を取り除き、最適部材配置及びそれに対応する断面積分布を求める理論を展開した。
3. ピン接合平面トラスでは、最適部材配置トラスにおいて、1 次固有値の重複度は大きく、主要部材と比べて非常に小さい断面積を有する 2 次的部材からなる網状の平面トラスが形成されるであろうことを、簡単な 3 部材トラスを用いて明らかにした。そこで、「理論的最適部材配置トラス」と、「実用的最適部材配置トラス」の新しい概念を導入

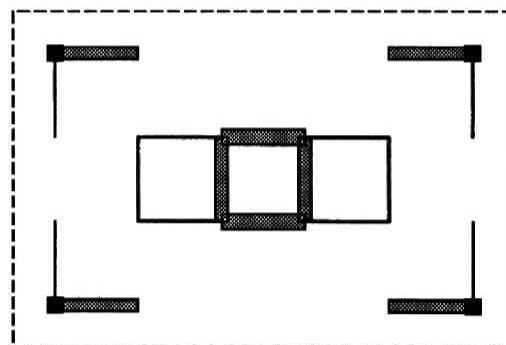
— : 1.0 cm²



Upper chords



Diagonals



Lower chords

図 5.26 59 節点剛接合平板状立体トラスの最適部材配置トラス

し、まず不安定な最適部材配置トラスを 2. の手法を用いて生成し、そのトラスに対して不安定なヒンジを固定することにより、実用的最適部材配置トラスを求める理論を展開した。

4. 種々のピン接合平面トラスに対し、実用的最適部材配置トラスを求めた。その結果、正方形平面トラスにおいて、非構造質量の存在する節点と支点を結ぶ直線上に部材が存在可能な場合には、最適部材配置は非常に単純なものとなることを示した。また、長方形平面トラスでは、支点間にアーチ状のトラスが形成されることを示した。
5. 3. に述べた困難点は、節点がピン接合であることに起因するものであり、剛接合平面及び立体トラスでは、2. の手法を用いて、最適部材配置トラスを何の困難もなく求めることができることを例証した。

参考文献

- [1] A.G.M. Michell, The limits of economy of materials in frame structures, *Philosophical Magazine*, Vol.8(47), pp589-597, 1904.
- [2] W. Prager, A note on discretized Michell structures, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.3, pp349-355, 1974.
- [3] G.I.N. Rozvany, *Structural Design via Optimality Criteria : the Prager Approach to Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989.
- [4] K. Svanberg, Optimization of geometry in truss design, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.28, pp63-80, 1981.
- [5] K. Imai and L.A. Schmit, Configuration optimization of trusses, *J. Struct. Div. ASCE*, Vol.107(ST5), pp745-756, 1981.
- [6] E.A. Sedak, Dynamic optimization of framed structures with variable layout, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.23, pp1273-1294, 1986.
- [7] O.E. Lev, Topology and optimality of certain trusses, *J. Struct. Div. ASCE*, Vol.107(ST2), pp383-393, 1981.
- [8] G. Sved and Z. Ginos, Structural optimization under multiple loading, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol.10, pp803-805, 1968.
- [9] U. Kirsch, Optimal topologies of truss structures, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.72, pp15-28, 1989.
- [10] W.R. Spillers, Shape optimization of structures, in: J.S.Gero (ed.), *Design Optimization*, Academic Press, New York, pp41-70, 1985.
- [11] U.T. Ringertz, A branch and bound algorithm for topology optimization of truss structures, *Eng. Opt.*, Vol.10, pp111-124, 1986.

- [12] U.T. Ringertz, On topology optimization of trusses, *Eng. Opt.*, Vol.9, pp209-218, 1985.
- [13] J.J. McKeown, The design of optimal trusses via sequences of optimal fixed displacement structures, *Eng. Opt.*, Vol.14, pp159-178, 1989.
- [14] J.H. Lin, W.Y. Che and Y.S. Yu, Structural optimization on geometrical configuration and element sizing with statical and dynamical constraints, *Int. J. Comp. & Srtuct.*, Vol.15(5), pp507-515, 1982.
- [15] B.H.V. Topping, Shape optimization of skeltal structures : A review, *J. Struct. Div. ASCE*, Vol.108(ST8), pp1933-1951, 1983.
- [16] U. Kirsch, Optimal topologies of structures, *Appl. Mech. Rev.*, Vol.42(8), pp223-239, 1989.
- [17] U. Kirsch, On the relationship between optimum structural topologies and geometries, *Struct. Optimization*, Vol.2, pp39-45, 1990.
- [18] U. Kirsch, On singular topologies in optimum structural design, *Struct. Optimization*, Vol.2, pp133-142, 1990.
- [19] Tsuneyoshi Nakamura and M.Ohsaki, A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.94, pp113-129, 1992.
- [20] 大崎 純, 中村 恒善, 指定 1 次固有振動数を有する平面トラスの最適部材配置の自然生成法, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 構造 I, pp1293-1294, 1990.
- [21] C.Y. Sheu, Elastic minimum-weight design for specified fundamental natural frequency, *Int. J. Solids Structures*, Vol.4, pp953-958, 1968.
- [22] E.F. Masur, Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints, *Int. J. Solids Structures*, Vol.20(3), pp211-231, 1984.
- [23] E.F. Masur, Some additional comments on optimal structural design under multiple eigenvalue constraints, *Int. J. Solids Structures*, Vol.21(2), pp117-120, 1985.

6 章 指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計

6.1 序

指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計問題に関する研究の歴史は浅く、あまり多くの論文は発表されていない [1-11]。また、その初期段階では、座屈前変形の影響を考慮に入れない、幾何剛性行列を用いた線形固有値問題による定式化がなされていた [1,2]。文献 [2] には、幾何剛性行列に基づく定式化による、最適性条件を用いた数値的手法が示されている。ところが、Khot[12] により、線形固有値問題による定式化に基づき得られた最適設計解に対し、幾何学的非線形性を考慮した増分解析を行なうと、得られた座屈荷重係数は、指定された値の半分以下になる場合があることが示された。そこで、最近では幾何学的非線形性を考慮した定式化がなされるようになった。

構造物の座屈形態は、極限点型座屈と分岐点型座屈に分類される [13-17]。Plaut *et al.*[3] は、極限点において接線剛性行列の行列式の値が 0 となる条件を用いて、2 部材トラスの最適設計解を求めている。しかし、その手法は汎用の最適化プログラムを用いたものであり、多くの部材を有するトラスに対しては、支配式の解析的表現が得られないため適用できない。Kamat *et al.*[4] は、極限点型座屈の場合に対してのみ適用可能な解析的手法を提示しているが、その手法も支配式の解析的表現を用いているため、大規模トラスに対しては適用できない。Levy and Perng[7] は、経験的最適性条件を導き、増分解析を繰返し行なう数値的手法を提示した。しかし、その手法は極限点型座屈の場合に対してのみ有効であり、大規模トラスに対しては、増分解析に多くの計算時間を必要とするものと思われる。Khot *et al.*[5] は、最適性条件を用いた繰返し計算による最適設計手法を提案している。しかし、その最適性条件は経験的に導かれたものであり、理論的根拠はみられない。一方、座屈荷重係数制約条件を、接線剛性行列の固有値の非負条件として一般的に与えた定式化 [9-11] 及び、それに基づく感度解析手法 [9,10] も存在するが、それらの論文では極限点型座屈の場合と分岐点型座屈の場合の相違については何も論じられていない。したがって、極限点型座屈の場合について、理論的に明らかな最適性条件に基づく手法及び、分岐点型座屈の場合について、幾何学的非線形性を考慮に入れた最適性条件を用いた論文は、筆者の知る限り存在しない。

本章では、座屈前変形を考慮した、指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計問題に対し、まず、離散系安定論における不整感度解析の理論を導入し、極限点型座屈の場合に対して文献 [5] とは異なる最適性必要条件を導き、剛体バネモデルを用いてその相違を明らかにする。さらに、対称分岐点型座屈を呈する設計解の集合を許容設計解集合と考えた場合に対し、minor imperfection[18,19] に基づく不整感度解析法を用いて最適性必要条件を導き、対称な搭状平面トラスを用いて検証する。また、2 章で示した最適設計解順序集合の概念を導入し、極限点型座屈の場合について、指定座屈荷重係数をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する理論を展開する。例題では、24 部材単層立体トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、その特性について考察する

本章で用いる記号の定義を以下に示す。

$\mathbf{A} = \{A_i\}$	部材断面積ベクトル
\mathbf{A}^d	不整を定める基本部材断面積ベクトル
$\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{A}_i\}$	最小断面積制限値ベクトル
a_k	第 k グループの部材断面積
\bar{a}_k	a_k に対する最小制限値
$\mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)$	第 i 行第 j 列の成分が $\frac{\partial^2 \Pi^C}{\partial u_i^c \partial u_j^c}$ で表わされるような行列
$\mathbf{C}^*(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)$	行列 \mathbf{C} の行列式
$\mathbf{D}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$	第 i 行第 j 列の成分が $\frac{\partial^2 \Pi^D}{\partial u_i^d \partial u_j^d}$ で表わされるような行列
$\mathbf{D}^*(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$	行列 \mathbf{D} の行列式
E	弾性係数
f	変位の自由度
$\mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$	第 i 行第 j 列の成分が $\frac{\partial^2 \Pi^G}{\partial u_i^F \partial u_j^F}$ で表わされるような行列
I^k	第 k グループに属する部材の番号の集合
$\mathbf{L} = \{L_i\}$	部材長ベクトル
l_k	第 k グループに属する部材の部材長の総和
m	部材数
m_k	第 k グループの部材数
$\mathbf{P} = \{P_i\}$	比例載荷荷重を規定する単位荷重ベクトル
\mathbf{Q}	一般化変位ベクトル
$\mathbf{Q}^E(\mathbf{A}, \Lambda)$	釣合い条件を満たす一般化変位ベクトル
$\mathbf{Q}^F(\mathbf{A}, \Lambda)$	基本釣合い経路を表わす一般化変位ベクトル
$\mathbf{Q}^c(\mathbf{A})$	極限点における一般化変位ベクトル
\mathbf{q}^F	基本釣合い経路からの一般化変位増分ベクトル
\mathbf{q}^c	設計 \mathbf{A}^0 の基本釣合経路からの一般化変位増分ベクトル
\mathbf{q}^d	極限点からの一般化変位増分ベクトル
r	部材のグループの数
$\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$	第 i 行第 j 列の成分が $\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial u_i \partial u_j}$ で表わされるような行列
V	全部材体積

\mathbf{u}^F	基本釣合い経路からの一般化変位増分ベクトル
\mathbf{u}^c	設計 \mathbf{A}^0 の基本釣合経路からの一般化変位増分ベクトル
\mathbf{u}^d	極限点からの一般化変位増分ベクトル
$\alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda)$	\mathbf{G} を対角化するための座標変換行列
$\alpha^c(\mathbf{A}^0, \Lambda)$	\mathbf{C} を対角化するための座標変換行列
$\alpha^d(\mathbf{A})$	\mathbf{D} を対角化するための座標変換行列
ε_i	第 i 部材のひずみ
$\Phi_s(\mathbf{A}, \Lambda)$	\mathbf{G} 及び \mathbf{S} の s 次固有ベクトル
Λ	荷重係数
Λ^c	座屈荷重係数
Λ_a^c	指定座屈荷重係数
$\lambda_s(\mathbf{A}, \Lambda)$	\mathbf{G} 及び \mathbf{S} の s 次固有値
$\Pi^C(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)$	全ポテンシャルエネルギー関数
$\Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$	全ポテンシャルエネルギー関数
$\Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$	全ポテンシャルエネルギー関数
$\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$	全ポテンシャルエネルギー関数
μ	ラグランジュ乗数
ξ	不整パラメーター
$\zeta_i(\mathbf{A})$	座屈荷重係数の不整感度
$\zeta_i^L(\mathbf{A})$	極限点型座屈荷重係数の不整感度
$\zeta_i^B(\mathbf{A})$	対称分岐点型座屈荷重係数の不整感度

6.2 臨界点の分類及び不整感度解析法の概説

臨界点の分類

本章では、すでに一般理論の確立している弾性安定論における不整感度解析法に基づく最適設計理論を展開する。そこで、本節では、まず臨界点の分類及び、それに対応する不整感度解析法 [13-17] について概説する。

荷重係数 Λ をパラメーターとした単調増加比例載荷荷重 $\Lambda \mathbf{P}$ の作用を受けるトラスを考える。部材中心線形状及び支持条件はあらかじめ定められているものとする。第 i 部材の断面積を A_i とすると、トラスは A_i の集合 $\mathbf{A} = \{A_i\}$ で完全に決定される。変位の自由度を f とすると、トラスの変形状態は f 個の成分を有する一般化変位ベクトル $\mathbf{Q} = \{Q_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, f$) で表現できる。設計 \mathbf{A} に対し、 Λ と \mathbf{Q} の関数としての、全ポテンシャルエネルギー関数を $\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ で表わす。一般化変位 \mathbf{Q} が荷重係数 Λ に対する釣合い状態に対応する一般化変位ベクトルであるための条件は、全ポテンシャルエネルギー停留の原理より

$$S_i(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.1)$$

で表わされる。ここで、

$$S_i(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) = \frac{\partial \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.2)$$

であり、釣合い式 (6.1) を満たす \mathbf{Q} を $\mathbf{Q}^E(\mathbf{A}, \Lambda)$ とする。

ここでは全ポテンシャルエネルギー関数 $\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ が全ひずみエネルギー関数 $\Pi_I^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q})$ と全外力エネルギー関数 $\Pi_E^S(\Lambda)$ を用いて

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) &= \Pi_I^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) - \Pi_E^S(\Lambda) \\ &= \Pi_I^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}) - \Lambda \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (6.3a, b)$$

のように定義される場合を考えるものとする。ここで、上添字 T はベクトルの転置を表わすものとする。全外力エネルギー関数 Π_E^S が変位ベクトル \mathbf{Q} に依存する非保存系に対しては、別の定式化が必要である。さらに、 $S_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ を

$$S_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) = \frac{\partial^2 \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, f) \quad (6.4)$$

で定義し、第 i 行第 j 列の成分が $S_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ であるような行列を $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ で表わす。行列 $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ は安定行列とよばれ、増分解析で用いられる接線剛性行列と同一のものである。 $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^E(\mathbf{A}, \Lambda), \Lambda)$ の最小固有値が正のとき、その釣合い状態は安定であり、最小固有値が負のと

き、その釣合い状態は不安定である。さらに、最小固有値が 0 であるとき、その釣合い状態は臨界状態にある [14-18]。

安定な基本釣合い経路が一般化変位ベクトル $\mathbf{Q}^F(\mathbf{A}, \Lambda)$ で表わされるものとし、一般化変位増分ベクトル $\mathbf{q}^F = \{q_i^F\}$ を

$$Q_i = Q_i^F(\mathbf{A}, \Lambda) + q_i^F \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.5)$$

で定義する。さらに、新しい一般化変位増分ベクトル $\mathbf{u}^F = \{u_i^F\}$ を座標変換行列 $\alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda)$ を用いて

$$\mathbf{q}^F = \alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda) \mathbf{u}^F \quad (6.6)$$

で定義する。そこで、 \mathbf{u}^F の関数としての新しい全ポテンシャルエネルギー関数 $\Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$ を次式で定める。

$$\Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda) = \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^F(\mathbf{A}, \Lambda) + \alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda) \mathbf{u}^F, \Lambda) \quad (6.7)$$

座標変換行列 $\alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda)$ は、第 i 行第 j 列の成分が

$$G_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda) = \frac{\partial^2 \Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)}{\partial u_i^F \partial u_j^F} \quad (i, j = 1, 2, \dots, f) \quad (6.8)$$

で表わされる行列 $\mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$ が、 $\mathbf{u}^F = \mathbf{0}$ において、対角化されるように定義するものとする。行列 $\alpha^F(\mathbf{A}, \Lambda)$ は行列 $\mathbf{G}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$ が対角行列となるような行列であるから、その第 k 列は、 $\mathbf{u}^F = \mathbf{0}$ ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^F(\mathbf{A}, \Lambda)$) における、行列 $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ の s 次固有ベクトル $\Phi_s(\mathbf{A}, \Lambda)$ であり、

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) \Phi_s(\mathbf{A}, \Lambda) = \lambda_s(\mathbf{A}, \Lambda) \Phi_s(\mathbf{A}, \Lambda) \quad (s = 1, 2, \dots, f) \quad (6.9)$$

が成立する。ここで、 $\lambda_s(\mathbf{A}, \Lambda)$ は行列 $\mathbf{S}(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ の s 次固有値であり、臨界点において $\lambda_1(\mathbf{A}, \Lambda^c(\mathbf{A})) = 0$ が成立し、臨界点での s 次固有ベクトル $\Phi_s^c(\mathbf{A})$ を次式で定義する。

$$\Phi_s^c(\mathbf{A}) = \Phi_s(\mathbf{A}, \Lambda^c(\mathbf{A})) \quad (s = 1, 2, \dots, f) \quad (6.10)$$

ここで、 $\Lambda^c(\mathbf{A})$ は設計 \mathbf{A} の臨界点における荷重係数(座屈荷重係数)であり、 $\Phi_1^c(\mathbf{A})$ は座屈モードである。臨界点は、ポテンシャルエネルギー関数 $\Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)$ の臨界点 $\mathbf{u}^F = \mathbf{0}$ 、 $\Lambda = \Lambda^c$ での性状により、次のように分類される。

$$\begin{aligned} \text{極限点} & : \quad \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda} \neq 0 \\ \text{対称分岐点} & : \quad \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda} = 0, \quad G_{111} = 0 \\ \text{非対称分岐点} & : \quad \frac{\partial G_1}{\partial \Lambda} = 0, \quad G_{111} \neq 0 \end{aligned} \quad (6.11a \sim c)$$

ここで、

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\partial \Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)}{\partial u_1^F} \\ G_{111} &= \frac{\partial^3 \Pi^G(\mathbf{A}, \mathbf{u}^F, \Lambda)}{\partial (u_1^F)^3} \end{aligned} \quad (6.12a, b)$$

である。

不整感度解析

後で定式化する最適設計問題に対する最適性条件には、座屈荷重係数の部材断面積に関する感度係数に相当する項が存在する。そこで、以下ではすでに一般理論の確立されている不整感度解析の理論を、断面積に関する不整のみを考慮した定式化を用いて概説する。不整感度解析は、臨界点が極限点の場合と分岐点の場合に対応して、異なる手法を用いなければならない。そこで、まず、極限点型座屈の場合の不整感度解析の理論の概要を述べる。

1つの設計 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ の極限点荷重係数 $\Lambda = \Lambda^c(\mathbf{A}^0)$ における一般化変位ベクトル \mathbf{Q}^d を $\mathbf{Q}^d(\mathbf{A}^0) = \mathbf{Q}^F(\mathbf{A}^0, \Lambda^c(\mathbf{A}^0))$ で定義する。さらに、一般化変位増分ベクトル \mathbf{q}^d を

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^c(\mathbf{A}^0, \Lambda^c(\mathbf{A}^0)) + q_i^d \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.13)$$

が満たされるように定義する。さらに、新しい一般化変位増分ベクトル \mathbf{u}^d を座標変換行列 $\boldsymbol{\alpha}^d(\mathbf{A}^0)$ を用いて

$$\mathbf{q}^d = \boldsymbol{\alpha}^d(\mathbf{A}^0) \mathbf{u}^d \quad (6.14)$$

で定義する。このとき、 \mathbf{u}^d の関数としての新しい全ポテンシャルエネルギー関数 $\Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ を

$$\Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda) = \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^d(\mathbf{A}^0) + \boldsymbol{\alpha}^d(\mathbf{A}^0) \mathbf{u}^d, \Lambda) \quad (6.15)$$

定義する。 $\boldsymbol{\alpha}^d(\mathbf{A}^0)$ は、第 i 行第 j 列の成分が

$$D_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda) = \frac{\partial^2 \Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)}{\partial u_i^d \partial u_j^d} \quad (i, j = 1, 2, \dots, f) \quad (6.16)$$

であるような行列 $D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ が設計 \mathbf{A}^0 における $\mathbf{u}^d = \mathbf{0}$ の極限点で対角化されるように定めるものとする。 $D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ の行列式を $D^*(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ とする。このとき、設計 \mathbf{A}^0 の極限点 $\mathbf{u}^d = \mathbf{0}$ 、 $\Lambda = \Lambda^c(\mathbf{A}^0)$ では $D^*(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda) = 0$ が成立する。いま、 \mathbf{A}^0 の近傍の設計解を、不整を定めるベクトル \mathbf{A}^d を導入し、不整パラメータ ξ の関数として

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \tilde{\mathbf{A}}(\xi) \\ &= \mathbf{A}^0 + \xi \mathbf{A}^d \end{aligned} \quad (6.17)$$

のように定めると、不整を有する設計解の行列式 $D^*(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ の値が 0 であるような極限点に対応する \mathbf{u}^d と Λ の組は、 ξ を与えるごとに決定されるため、 ξ の関数と考えることができ、それらを $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ 及び $\tilde{\Lambda}(\xi)$ のように表わす。すなわち、 $\tilde{\mathbf{u}}(\xi)$ 及び $\tilde{\Lambda}(\xi)$ は次の2つの式で定められる。

$$D_i(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.18)$$

$$D^*(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) = 0 \quad (6.19)$$

ここで,

$$D_i(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda) = \frac{\partial \Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)}{\partial u_i^d} \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.20)$$

であり, (6.18) は釣合い式である。また, 引数 ξ は簡単のため省略する。さらに, $\xi = 0$ において, $\tilde{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{A}^0$ 及び $\tilde{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$ が成立し, 行列 $D(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda})$ は対角化される。

(6.18) 及び (6.19) の両辺を ξ で微分すると, 次の各式を得る。

$$\sum_{j=1}^f \left(D_{ij} \frac{d\tilde{u}_j}{d\xi} \right) + \frac{\partial D_i}{\partial \Lambda} \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\xi} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial D_i}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.21)$$

$$\sum_{j=1}^f \left(\frac{\partial D^*}{\partial u_j} \frac{d\tilde{u}_j}{d\xi} \right) + \frac{\partial D^*}{\partial \Lambda} \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\xi} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial D^*}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) = 0 \quad (6.22)$$

ここで, 引数 \mathbf{A} , \mathbf{u} 及び Λ は簡単のため省略した。 $\xi = 0$ に対応する設計 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ の極限点では $D_{11} = 0$ 及び $\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \neq 0$ が成立する。また, $\xi = 0$ で D は対角化されるため, $D_{1j} = 0$ ($j = 2, 3, \dots, f$) が成立することを用いると, (6.21) に対して $i = 1$ とすることにより

$$\left. \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = - \left[\left\{ \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial D_1}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right\} / \frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \right] \Big|_{\xi=0} \quad (6.23)$$

を得る。(6.22) は座屈モード Φ_1^c の不整感度を求めるために用いられるが, ここでは省略する。

分岐点では $\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} = 0$ であるから, 不整感度係数として (6.23) を用いることはできず, 別の定式化が必要となる。

設計 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ の基本釣合い経路を一般化変位ベクトル $\mathbf{Q}^F(\mathbf{A}^0, \Lambda)$ からの一般化変位増分ベクトル \mathbf{q}^c が対角化されるような座標変換行列 $\boldsymbol{\alpha}^c(\mathbf{A}^0, \Lambda)$ を用いて新しい一般化変位増分ベクトル \mathbf{u}^c を

$$\mathbf{q}^c = \boldsymbol{\alpha}^c(\mathbf{A}^0, \Lambda) \mathbf{u}^c \quad (6.24)$$

で定義する。このとき, \mathbf{u}^c の関数としての新しい全ポテンシャルエネルギー関数 $\Pi^C(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)$ を

$$\Pi^C(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda) = \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}^F(\mathbf{A}^0, \Lambda) + \boldsymbol{\alpha}^c(\mathbf{A}^0, \Lambda) \mathbf{u}^c, \Lambda) \quad (6.25)$$

で定義する。 $\Pi^C(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)$ は $\Pi^D(\mathbf{A}, \mathbf{u}^d, \Lambda)$ とは異なり, その定義において $\boldsymbol{\alpha}^c(\mathbf{A}^0, \Lambda)$ は Λ の関数である。また, $\mathbf{Q}^F(\mathbf{A}^0, \Lambda)$ は Λ の関数であり, 設計 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ において, 任意の Λ に対して $\mathbf{u}^c = \mathbf{0}$ で釣合い式が満たされる。したがって, $\Pi^C(\mathbf{A}^0, \mathbf{u}^c, \Lambda)$ について次式が成立する。

$$C_i(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda) = \frac{\partial C_i(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial^2 C_i(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda)}{\partial \Lambda^2} = \dots = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.26)$$

ここで,

$$C_i(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda) = \frac{\partial \Pi^c(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)}{\partial u_i^c} \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.26)$$

である。また、 $\alpha(\mathbf{A}^0, \Lambda)$ も Λ の関数であるから、 $\mathbf{u}^c = \mathbf{0}$ において $\Pi^C(\mathbf{A}^0, \mathbf{u}^c, \Lambda)$ は任意の Λ に対して対角化され、

$$C_{ij}(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda) = \frac{\partial C_{ij}(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda)}{\partial \Lambda} = \frac{\partial^2 C_{ij}(\mathbf{A}^0, \mathbf{0}, \Lambda)}{\partial \Lambda^2} = \cdots = 0 \quad (i \neq j) \quad (6.27)$$

が成立する。ここで、

$$C_{ij}(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda) = \frac{\partial^2 \Pi^c(\mathbf{A}, \mathbf{u}^c, \Lambda)}{\partial u_i^c \partial u_j^c} \quad (i, j = 1, 2, \dots, f) \quad (6.27)$$

以下簡単のため、引数 \mathbf{A} 、 \mathbf{u}^c 及び Λ は省略する。

関数 Π^C において、極限点型座屈の場合と同様に、不整パラメーター ξ を (6.17) を用いて定義する。分岐点型座屈の場合には、釣合い式を満たし、 \mathbf{C} の行列式 C^* の値が 0 であるような臨界点の集合を表わす経路において、 ξ と臨界点での u_1^c の値は 1 対 1 に対応する。したがって、 ξ は u_1^c の関数と考えることができ、それを $\check{\xi}(u_1^c)$ のように表わす。他の変数に対しても、 u_1^c の関数として $\check{\mathbf{u}}^c(u_1^c)$ 、 $\check{\Lambda}(u_1^c)$ 及び $\check{\mathbf{A}}(u_1^c) = \check{\mathbf{A}}(\check{\xi}(u_1^c))$ のように表わす。このとき、次式が成立する。

$$C_i(\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{u}}^c, \check{\Lambda}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.28)$$

$$C^*(\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{u}}^c, \check{\Lambda}) = 0 \quad (6.29)$$

ここで、簡単のため引数 u_1^c は省略する。 $\xi = 0$ において、 \mathbf{C} は対角化されるから、 C^* は次式で与えられる。

$$C^* = C_{11}C_{22}C_{33} \cdots C_{ff} \quad (6.30)$$

$\check{\mathbf{u}}^c = \mathbf{0}$ すなわち $\xi = 0$ では $C_{11} = 0$ 及び $C_{22}C_{33} \cdots C_{ff} \neq 0$ が成立する。ゆえに (6.30) を用いると、(6.28) 及び (6.29) の両辺を u_1^c で微分した式より次の各式を得る。

$$\left[\sum_{j=1}^f \left(C_{ij} \frac{d\check{u}_j^c}{du_1^c} \right) + \frac{\partial C_i}{\partial \Lambda} \frac{d\check{\Lambda}}{du_1^c} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_i}{\partial A_j} \frac{d\check{A}_j}{d\xi} \right) \frac{d\check{\xi}}{du_1^c} \right] \bigg|_{\xi=0} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.31)$$

$$\left[\sum_{j=1}^f \left(C_{11j} \frac{d\check{u}_j^c}{du_1^c} \right) + \frac{\partial C_{11}}{\partial \Lambda} \frac{d\check{\Lambda}}{du_1^c} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{d\check{A}_j}{d\xi} \right) \frac{d\check{\xi}}{du_1^c} \right] \bigg|_{\xi=0} = 0 \quad (6.32)$$

(6.31) で $i = 1$ とし、 $\xi = 0$ に対応する分岐点では $C_{1j} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, f$) 及び $\frac{\partial C_{11}}{\partial \Lambda} = 0$ が成立することを用いると、

$$\left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{d\check{A}_j}{d\xi} \right) \frac{d\check{\xi}}{du_1^c} \right] \bigg|_{\xi=0} = 0 \quad (6.33)$$

を得る。

分岐点では、良く知られているように、 $\xi = 0$ において $\eta = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_1}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \neq 0$ が成立するような不整を考えたときの、分岐点荷重係数の不整感度の絶対値は無限大である。ここでは、 $\xi = 0$ において $\eta = 0$ が成立するような初期不整 (断面積変化) を考える。このような断面積変化は、不整感度解析の分野では minor imperfection あるいは second order imperfection とよばれる [16,18]。本節の目的は、すでに得られている一般理論の概要を述べることにあるから、このような不整のみを考えることの意義については後の節で詳細に論じる。 $\eta = 0$ を用いると、(6.33) は自明な式となる。 $\xi = 0$ において C は対角行列であることを用いると、 $i = s$ (≥ 2) に対しては (6.31) より

$$\left. \frac{d\tilde{u}_s}{du_1^c} \right|_{\xi=0} = - \left[\frac{1}{C_{ss}} \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_s}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \frac{d\tilde{\xi}}{du_1^c} + \frac{\partial C_s}{\partial \Lambda} \frac{d\tilde{\Lambda}}{du_1^c} \right\} \right] \Big|_{\xi=0} \quad (6.34)$$

($s = 2, 3, \dots, f$)

を得る。 $\xi = 0$ に対応する設計 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^0$ の分岐点では $\mathbf{u}^c = \mathbf{0}$ であり、 $C_{111} = G_{111}$ が成立し、(6.11b) より、対称分岐点では $C_{111} = 0$ が成立する。そこで、以下では対称分岐点の場合の不整感度の表現を導く。

(6.32) 及び (6.34) より次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{s=2}^f \left(\frac{C_{11s}}{C_{ss}} \frac{\partial C_s}{\partial \Lambda} \frac{d\tilde{\Lambda}}{du_1^c} \right) - \frac{\partial C_{11}}{\partial \Lambda} \frac{d\tilde{\Lambda}}{du_1^c} \right] \Big|_{\xi=0} \\ &= \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial \xi} \right) \frac{d\tilde{\xi}}{du_1^c} - \sum_{s=2}^f \left\{ \frac{C_{11s}}{C_{ss}} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_s}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right\} \frac{d\tilde{\xi}}{du_1^c} \right] \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \quad (6.35)$$

ここで、

$$\left[\frac{d\tilde{\Lambda}}{du_1^c} / \frac{d\tilde{\xi}}{du_1^c} \right] \Big|_{\xi=0} = \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\tilde{\xi}} \Big|_{\xi=0} \quad (6.36)$$

であり、 β^B を

$$\beta^B = \left[\frac{\partial C_{11}}{\partial \Lambda} - \sum_{s=2}^f \left(\frac{C_{11s}}{C_{ss}} \frac{\partial C_s}{\partial \Lambda} \right) \right] \Big|_{\xi=0} \quad (6.37)$$

で定義すると、 β^B は $\tilde{\mathbf{A}}$ の定義すなわち不整の定義に依存しない量であるから、(6.35) 及び (6.36) より

$$\left. \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\tilde{\xi}} \right|_{\xi=0} = \frac{1}{\beta^B} \left[\sum_{s=2}^f \left\{ \frac{C_{11s}}{C_{ss}} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_s}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right\} - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right] \Big|_{\xi=0} \quad (6.38)$$

を得る。

6.3 最適設計問題の定式化及び最適性必要条件

指定座屈荷重係数を Λ_a^c ，第 i 部材の最小断面積制限値を \bar{A}_i とし，最適設計問題を次のように定式化する。

[Problem OPB]

座屈荷重係数制約条件

$$\Lambda^c(\mathbf{A}) \geq \Lambda_a^c \quad (6.40)$$

及び，最小断面積制約条件

$$A_i \geq \bar{A}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.41)$$

の下で，全部材体積

$$V(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m (A_i L_i) \quad (6.42)$$

を最小にするような最適設計解を求めよ。

ここで， m 及び L_i は，部材数及び第 i 部材の部材長である。また， \bar{A}_i は部材座屈軸力に関する条件により決定されるべきものである。

Problem OPB に対する最適性必要条件 (Kuhn-Tucker 条件 [19]) は次のようになる。

$$\begin{aligned} A_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \mu \zeta_i(\mathbf{A}) = L_i \\ A_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \mu \zeta_i(\mathbf{A}) \leq L_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.43a, b)$$

ここで， μ は非負のラグランジュ乗数であり， $\zeta_i(\mathbf{A})$ は次式で与えられる。

$$\zeta_i(\mathbf{A}) = \frac{\partial \Lambda^c(\mathbf{A})}{\partial A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.44)$$

$\zeta_i(\mathbf{A})$ は，設計変数 A_i を変化させたときの座屈荷重係数の変化率を表わす量であり，最適設計理論の分野では設計感度 (design sensitivity) とよばれる。一方，離散系安定論の分野では， A_i を不整パラメーターと考えれば， $\zeta_i(\mathbf{A})$ は不整感度 (imperfection sensitivity) とよばれる量である。そこで，以下では，前節で概説した不整感度解析の理論に基づき，極限点型座屈及び分岐点型座屈のそれぞれの場合に対し，(6.43a, b) 及び (6.44) の最適性必要条件の具体的表現を導く。

極限点型座屈の場合の最適性必要条件

ここでは、極限点型座屈を呈する設計解の集合を許容設計解として考慮した場合の最適性必要条件の表現を導く。(6.44) の $\zeta_i(\mathbf{A})$ は、不整パラメーターに対する基本ベクトルとして、 $A_i^d = 1$ 、 $A_j^d = 0$ ($j \neq i$) を用いたときの座屈荷重係数の不整感度に相当する。したがって、

$$\begin{aligned} j = i \text{ のとき} \quad & \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} = 1 \\ j \neq i \text{ のとき} \quad & \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.45a, b)$$

が成立する。ゆえに、極限点型座屈の場合の $\zeta_i(\mathbf{A})$ を $\zeta_i^L(\mathbf{A})$ とすると、(6.23) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \zeta_i^L &= \frac{\partial \Lambda^c}{\partial A_i} \\ &= - \left. \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \\ &= \left[\frac{\partial D_1}{\partial A_i} \middle/ \frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \right] \bigg|_{\xi=0} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.46)$$

ここで、引数 \mathbf{A} は省略した。また、以下では D_1 に関する量はすべて $\xi = 0$ の設計 \mathbf{A}^0 の極限点において評価するものとする。(6.5) 及び (6.13) において、極限点は基本釣合い経路上に存在するため、 $\mathbf{Q}_i^F(\mathbf{A}, \Lambda)$ を設計 \mathbf{A}^0 の極限点において評価すると、 $\mathbf{q}^F = \mathbf{q}^d$ となる。(6.5), (6.6), (6.15) 及び、 $\xi = 0$ において $\boldsymbol{\alpha}^d$ の第1列は $\boldsymbol{\Phi}_1^c$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial \Pi^D}{\partial u_1^d} \\ &= \left(\frac{\partial \Pi^S}{\partial \mathbf{q}^F} \right)^T \frac{d\mathbf{q}^F}{du_1^d} \\ &= \left(\frac{\partial \Pi^S}{\partial \mathbf{q}^F} \right)^T \boldsymbol{\Phi}_1^c \\ &= \left(\frac{\partial \Pi^S}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \boldsymbol{\Phi}_1^c \end{aligned} \quad (6.47)$$

を得る。さらに、(6.3) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial \mathbf{Q}} \right)^T \boldsymbol{\Phi}_1^c \\ &= -\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Phi}_1^c \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.48)$$

(6.46) において、 $\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda}$ は i に依存しない量であるから、 τ_i^L 及び β^L を

$$\tau_i^L = \frac{\partial D_1}{\partial A_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.49)$$

$$\beta^L = \mu \middle/ \frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \quad (6.50)$$

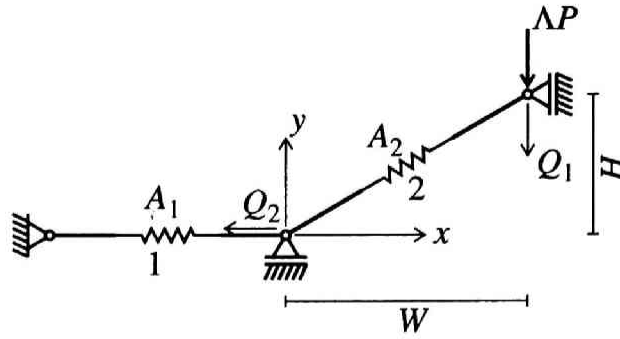


図 6.1 2 部材剛体バネモデル

とすると, (6.43a, b), (6.46), (6.49) 及び (6.50) より極限点型の場合の最適性必要条件は次の表現に帰せられる。

$$\begin{aligned} A_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \beta^L \tau_i^L = L_i \\ A_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \beta^L \tau_i^L \leq L_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (6.51a, b)$$

文献 [5] では, 極限点型座屈の場合において, 座屈時の各部材のひずみエネルギーが一定であるという最適性条件を用いている。その最適性条件は, 理論的に導かれたものではなく, 全く経験的なものである。そこで, 以下では文献 [5] の最適性条件と, 本章で導いた (6.51a, b) の最適性必要条件を比較する。

図 6.1 のような 2 自由度剛体バネモデルを考える。このモデルでは, 荷重係数と一般化変位の関係の解析的表現が得られ, 増分解析を行わずに極限点における変位を求めることができる。以下では, その解析的表現を用いて, 極限点型座屈の場合の最適性条件の検証及び, 既往の経験的最適性条件との比較を行なう。

部材 1 及び部材 2 の中央に存在するバネを, それぞれバネ 1 及びバネ 2 とする。バネ 1 及びバネ 2 の伸び剛性を A_1 及び A_2 で表わす。変形後のバネ 2 と x 軸のなす角を θ とすると, θ は

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{H - Q_1}{W + Q_2} \right) \quad (6.52)$$

で定められる。また, バネ 1 及びバネ 2 の軸力を, 圧縮を正として T_1 及び T_2 でそれぞれ表わすと, 外力 ΔP と T_1 及び T_2 の関係は,

$$\begin{aligned} T_2 \sin \theta &= \Delta P \\ T_2 \cos \theta &= T_1 \end{aligned} \quad (6.53a, b)$$

のようになる。したがって、バネ 1 及びバネ 2 の縮み量 d_1 及び d_2 は (6.53a, b) より

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{T_1}{A_1} \\
 &= \frac{T_2 \cos \theta}{A_1} \\
 &= \frac{\Lambda P}{A_1 \tan \theta} \\
 d_2 &= \frac{T_2}{A_2} \\
 &= \frac{\Lambda P}{A_2 \sin \theta}
 \end{aligned} \tag{6.54a, b}$$

で表わされる。ゆえに、変形前の部材 2 の部材長 L_2 は $\sqrt{H^2 + W^2}$ であるから、変形後の部材 2 の部材長 L_2^d は

$$\begin{aligned}
 L_2^d &= L_2 - d_2 \\
 &= \sqrt{H^2 + W^2} - \frac{\Lambda P}{A_2 \sin \theta}
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

となり、 Q_1 及び変形後の部材 2 を x 軸に投影した長さ W^d は

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= H - \sqrt{H^2 + W^2} \sin \theta + \frac{\Lambda P}{A_2} \\
 W^d &= \sqrt{H^2 + W^2} \cos \theta - \frac{\Lambda P}{A_2 \tan \theta}
 \end{aligned} \tag{6.56a, b}$$

である。ところで、

$$Q_2 = W^d - W \tag{6.57}$$

であり、 Q_2 はバネ 1 の縮み量 d_1 に一致するから、(6.54a)、(6.56a, b) 及び (6.57) より次式を得る。

$$\frac{\Lambda P}{A_2 \tan \theta} = \sqrt{H^2 + W^2} \cos \theta - \frac{\Lambda P}{A_2 \tan \theta} - W \tag{6.58}$$

(6.58) より

$$\Lambda P = \frac{\{\sqrt{H^2 + W^2} \cos \theta - W\} \tan \theta}{1/A_1 + 1/A_2} \tag{6.59}$$

を得る。

(6.56a, b) 及び (6.59) より、 θ をパラメータとして Q_1 及び ΛP を計算することができる。 $H = 50.0$ cm, $W = 100.0$ cm, $A_1 = A_2 = 0.5$ kgf/cm 及び $P = 1.0$ kgf のときの、 Q_1 と Λ の関係を図 6.2 に示す。 θ と Λ に関しても同様の図が得られる。図 6.2 から明らかなように、極限点では座屈前の変位成分が 0 でないような一般化変位に関する荷重係数の微分係数は 0 である。(6.59) の両辺を θ で微分し、 $\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = 0$ を用いると、

$$\sqrt{H^2 + W^2} \cos \theta^c - W \frac{1}{\cos^2 \theta^c} = 0 \tag{6.60}$$

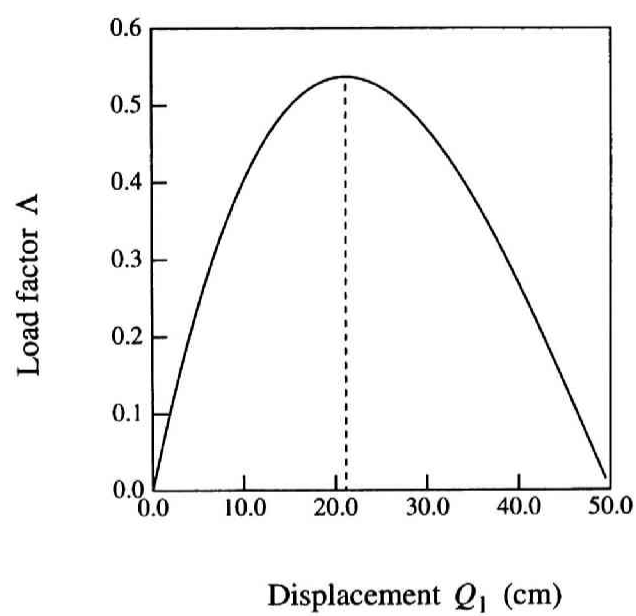


図 6.2 2 部材剛体バネモデルの変位と荷重係数の関係

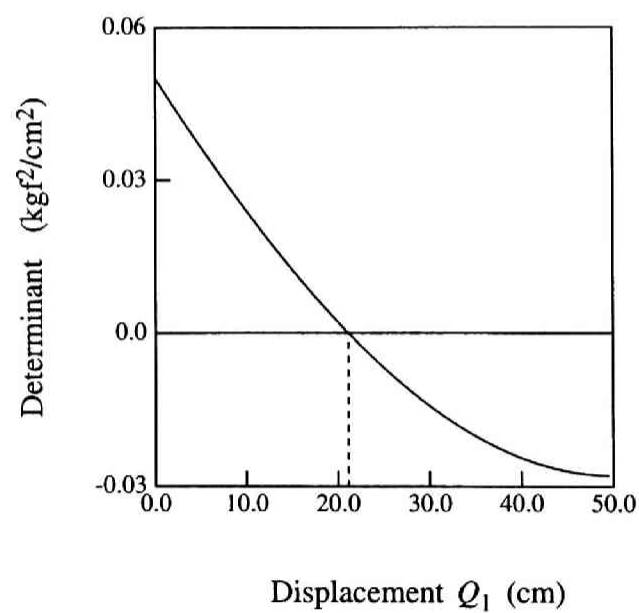


図 6.3 2 部材剛体バネモデルの変位と行列式の値のの関係

を得る。ここで、 θ^c は座屈時の θ の値である。(6.60) より

$$\cos^3 \theta^c = \frac{W}{\sqrt{H^2 + W^2}} \quad (6.61)$$

すなわち

$$\theta^c = \cos^{-1} \left\{ \left(\frac{W}{\sqrt{H^2 + W^2}} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (6.62)$$

を用いて θ^c を計算することができる。(6.62) より θ^c は設計変数 A_1 及び A_2 に依存せず、幾何学的条件のみにより決定されることがわかる。 $H = 50.0$ cm, $W = 100.0$ cm, $A_1 = A_2 = 0.5$ kgf/cm のとき、 $\theta^c = 15.5296$ deg であり、(6.56a) より $Q_1 = 21.1391$ cm となり、図 6.2 で Λ が最大となっている Q_1 の値と一致している。以上より、この 2 部材剛体バネモデルでは、増分解析を行わずに最適性必要条件の検証を行なうことができる。

変形後の部材 2 の長さ L_2^d は、 Q_1 及び Q_2 を用いると、

$$L_2^d = \sqrt{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2} \quad (6.63)$$

のように書けるから、全ポテンシャルエネルギー Π^S は、 $\mathbf{A} = \{A_1, A_2\}$, $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2\}$ 及び Λ の関数として、

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) = & \frac{1}{2} A_1 (Q_2)^2 \\ & + \frac{1}{2} A_2 \left\{ \sqrt{H^2 + W^2} - \sqrt{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2} \right\}^2 - \Lambda P Q_1 \end{aligned} \quad (6.64)$$

のようになる。(6.64) の Π^S を Q_1 及び Q_2 で微分すると次の各式を得る。

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\partial \Pi^S}{\partial Q_1} \\ &= -A_2 (H - Q_1) \\ &\quad + A_2 (H^2 + W^2) (H - Q_1) \left[(H^2 + W^2) \{ (H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2 \} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ S_2 &= \frac{\partial \Pi^S}{\partial Q_2} \\ &= A_1 Q_2 + A_2 (W + Q_2) \\ &\quad - A_2 (H^2 + W^2) (H - Q_1) \left[(H^2 + W^2) \{ (H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2 \} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.65a, b)$$

ここで、 S_1 , S_2 等の Π^S に関する量はすべて $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^c$, $\Lambda = \Lambda^c$ で評価したものを意味する。(6.65a, b) の両辺をさらに Q_1 及び Q_2 で微分すると、

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\partial S_1}{\partial Q_1} \\ &= A_2 - A_2 (H^2 + W^2) \left[(H^2 + W^2) \{ (H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2 \} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + A_2 (H^2 + W^2) (H - Q_1)^2 \left[(H^2 + W^2) \{ (H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2 \} \right]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} &= \frac{\partial S_2}{\partial Q_2} \\
&= A_1 - A_2 [(H^2 + W^2) \{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2\}]^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad + A_2 [(H^2 + W^2) \{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2\}]^{-\frac{3}{2}} \\
S_{12} &= \frac{\partial S_1}{\partial Q_2} \\
&= -A_2 (H^2 + W^2) (H - Q_1)^2 [(H^2 + W^2) \{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2\}]^{-\frac{3}{2}} \\
S_{21} &= S_{12}
\end{aligned} \tag{6.66a \sim d}$$

を得る。また、行列式 S^* は、

$$S^* = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} \tag{6.67}$$

で与えられる。図 6.2 の例での、 Q_1 と S^* の関係を図 6.3 に示す。ここで、 Λ が最大となる Q_1 の値 = 21.1391 cm において、 S^* が 0 となっていることを確認した。極限点では (6.9a) の λ_1 は 0 であるから、図 6.9(a) より次式を得る。

$$S\Phi_1^c = 0 \tag{6.68}$$

(6.68) を成分表示すると、

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11}^c \\ \Phi_{12}^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.69}$$

を得る。ここで、 Φ_{11}^c 及び Φ_{12}^c はそれぞれ Φ_1^c の第 1 成分及び第 2 成分である。(6.69) の上側の式より、

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}^c &= S_{12} \\
\Phi_{12}^c &= -S_{11}
\end{aligned} \tag{6.70a, b}$$

とすることができる。(6.47) より、

$$D_1 = S_1\Phi_{11}^c + S_2\Phi_{12}^c \tag{6.71}$$

を得る。ゆえに、 τ_1^L 及び τ_2^L は

$$\begin{aligned}
\tau_1^L &= \frac{\partial S_1}{\partial A_1} \Phi_{11}^c + \frac{\partial S_2}{\partial A_1} \Phi_{12}^c \\
\tau_2^L &= \frac{\partial S_1}{\partial A_2} \Phi_{11}^c + \frac{\partial S_2}{\partial A_2} \Phi_{12}^c
\end{aligned} \tag{6.72a, b}$$

ここで, (6.65a, b) より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_1}{\partial A_1} &= 0 \\
\frac{\partial S_2}{\partial A_1} &= Q_2 \\
\frac{\partial S_1}{\partial A_2} &= (H - Q_1) \\
&\quad + (H^2 + W^2)(H - Q_1) [(H^2 + W^2) \{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2\}]^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{\partial S_2}{\partial A_2} &= (W + Q_2) \\
&\quad - (H^2 + W^2)(H - Q_1) [(H^2 + W^2) \{(H - Q_1)^2 + (W + Q_2)^2\}]^{-\frac{1}{2}} (6.73a \sim d)
\end{aligned}$$

である。

いま, 目的関数として伸び剛性の和 $A_1 + A_2$ が与えられ, 指定座屈荷重係数 Λ_a^c を 1.0 とする。このとき, 1つの設計解 $A_1 = A_1^*$, $A_2 = A_2^*$ に対する極限点荷重係数を Λ^* とすると, 明らかに設計解 $A_1 = A_1^*/\Lambda^*$, $A_2 = A_2^*/\Lambda^*$ の極限点荷重は Λ_a^c ($= 1.0$) に一致する。したがって, A_1 を与えることにより, $\Lambda^c = \Lambda_a^c = 1.0$ が成立するような A_2 を決定することができる。図 6.4 には, $\Lambda^c = \Lambda_a^c = 1.0$ の条件の下での, A_1 と目的関数の値の関係を示す。ここで, 目的関数の値は $A_1 \simeq 0.5$ kgf/cm で最小になっている。図 6.5 には, A_1 とバネ 1 及びバネ 2 の座屈時の単位伸び剛性 (コスト) あたりひずみエネルギーの関係を示す。図 6.5 より, バネ 1 及びバネ 2 の単位コストあたりひずみエネルギーは $A_1 \simeq 0.4907$ kgf/cm で一致していることがわかる。図 6.6 には, τ_i^L の値と A_1 の関係を示す。図 6.6 より, τ_i^L の値は $A_1 \simeq 0.5$ kgf/cm で一致していることがわかる。したがって, $A_1 \simeq 0.5$ kgf/cm で, 本章で導いた最適性条件が満たされているのに対し, 文献 [5] での最適性条件は満たされていない。

以上より, 文献 [5] の最適性条件は近似的なものであり, 本節で導いた最適性条件を用いるべきであることが例証された。文献 [5] では, 図 6.7 のような 2 部材トラスに対して, $W_1 \neq W_2$ の場合には, 2つの部材の断面積が等しいという最適設計解を導いている。ところで, 2つの部材の座屈時の単位体積あたりひずみエネルギーが等しいという最適性条件を用いているため, 2つの部材の座屈時の軸方向ひずみは一致しなければならない。ところが, 2つの部材の x 軸とのなす角度は異なり, かつ部材断面積は等しいから, 厳密なひずみ変位関係を用いたならば, 明らかに荷重の作用している節点における x 方向の釣合いが満たされない。したがって, 文献 [5] において 2つの部材の断面積が等しい最適設計解が得られたのは, 近似的なひずみ変位関係を用いたためであるといえる。

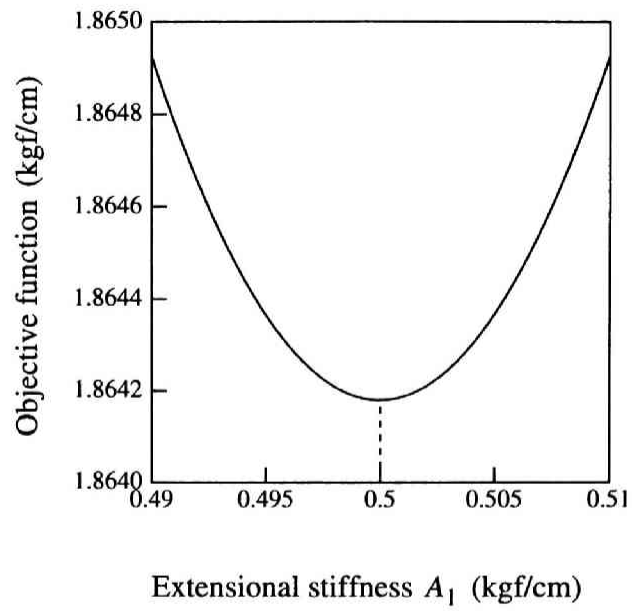


図 6.4 2 部材剛体バネモデルのバネ 1 の剛性と目的関数値の関係

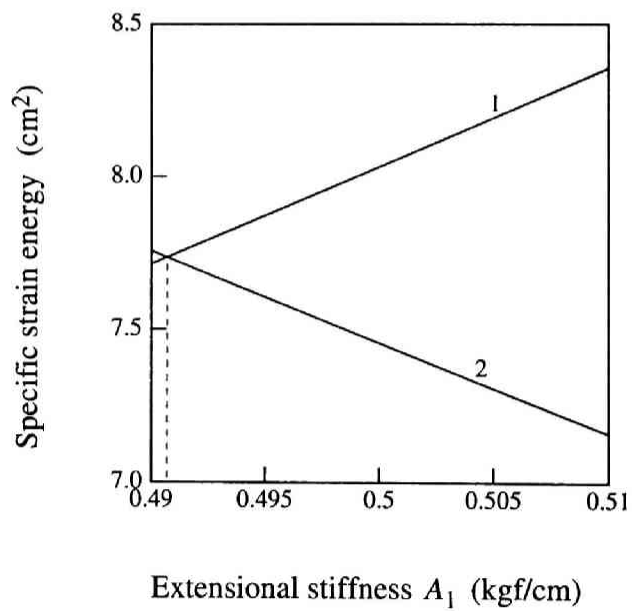


図 6.5 2 部材剛体バネモデルのバネ 1 の剛性と単位コストあたりひずみエネルギーの関係

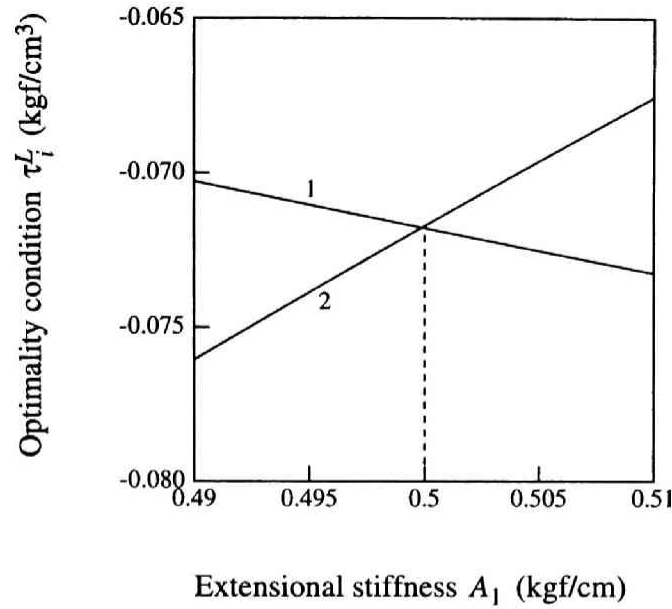


図 6.6 2 部材剛体バネモデルのバネ 1 の剛性と τ_i^L の関係

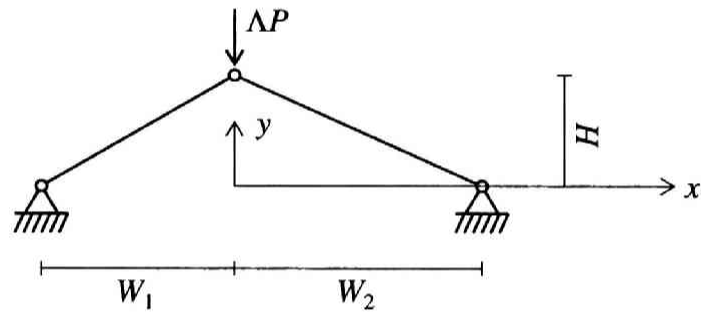
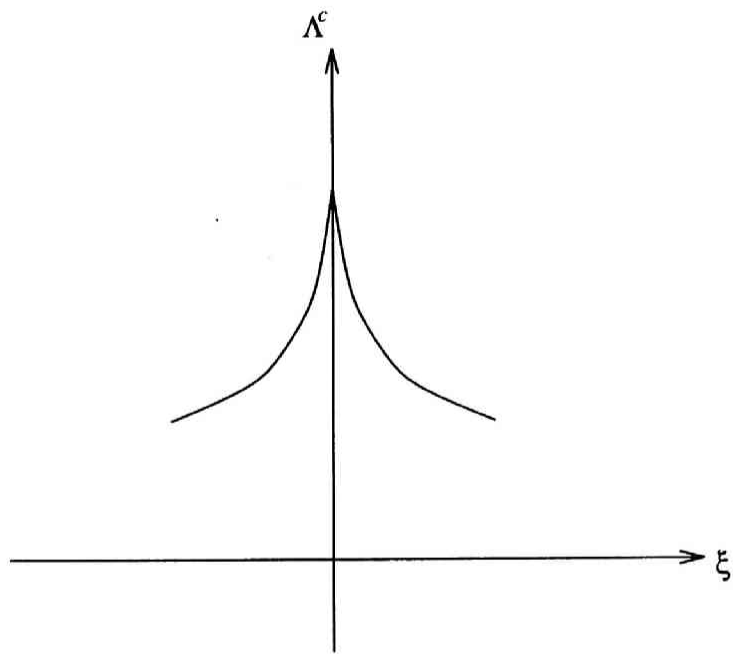


図 6.7 2 部材平面トラス

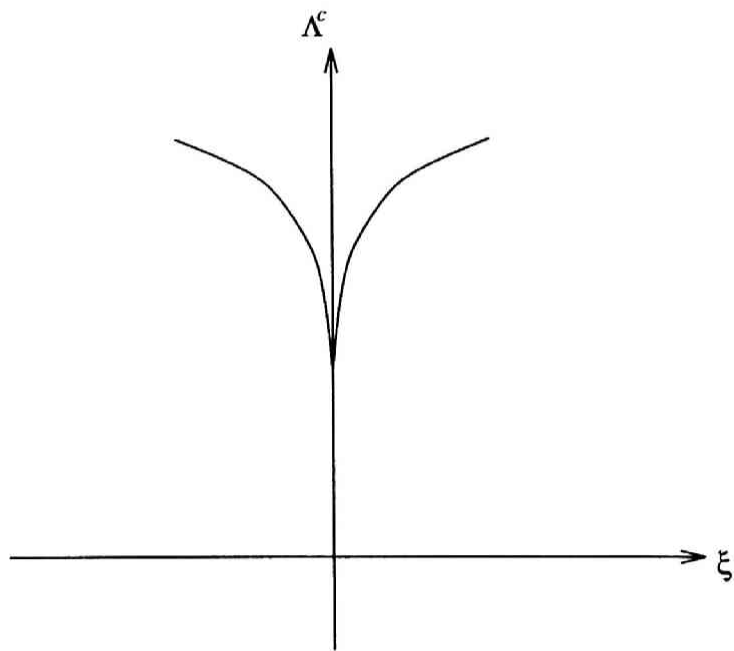
対称分岐点型の場合の最適性必要条件

ここでは、対称分岐点型座屈を呈する設計解集合を許容設計解集合として考慮した場合の最適性必要条件の表現を導く。前節では $\eta = 0$ が成立するような minor imperfection に対する不整感度解析の概要を述べた。一方、 $\eta \neq 0$ が成立する major imperfection (first order imperfection) に対する不整感度係数の絶対値は無限大になることが知られている。図 6.8(a ~ c) には、それぞれ不安定対称分岐点、安定対称分岐点及び非対称分岐点の場合の major imperfection に対する不整パラメータと座屈荷重係数 Λ^c の関係を示す。これらの図から明らかなように、分岐点の場合の座屈荷重係数の不整感度係数の絶対値は無限大であるから、(6.44) の $\zeta_i(\mathbf{A})$ の絶対値は無限大となり、最適性条件の具体的表現を導くことはできない。



Imperfection Parameter

図 6.8(a) 不安定対称分岐点の場合の不整感度曲線



Imperfection Parameter

図 6.8(b) 安定対称分岐点の場合の不整感度曲線

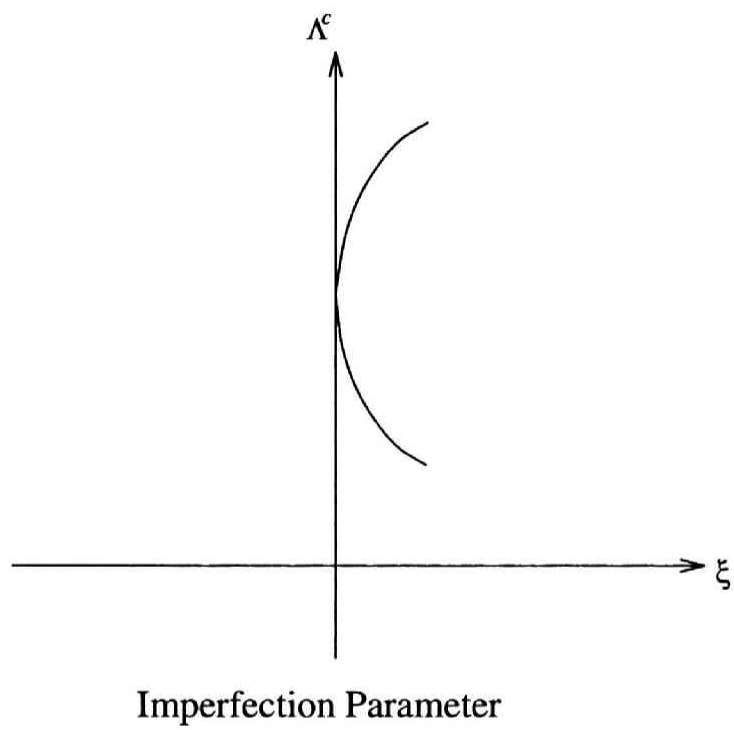


図 6.8(c) 非対称分岐点の場合の不整感度曲線

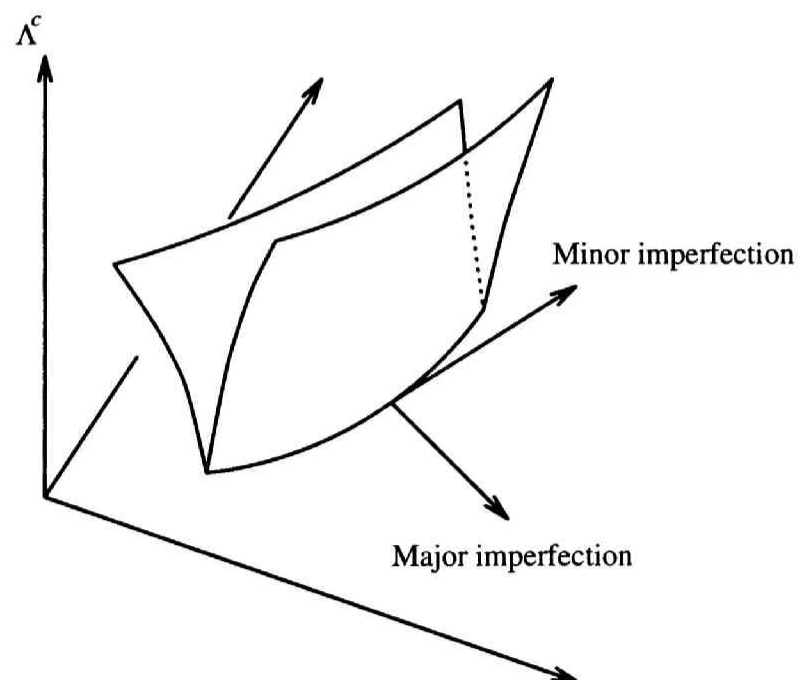


図 6.9 安定対称分岐点の場合の major imperfection 及び minor imperfection に対応する不整感度曲線

不安定対称分岐点の場合には、明らかに、最適設計解は major imperfection の存在しない設計解である。しかし、不整の存在する構造物の座屈荷重係数は、不整の存在しない完全系の座屈荷重係数と比べて極端に小さい値をとるから、完全系の座屈荷重係数のみを考慮して設計を行なうことはできず、何らかの不整量のノルムを導入して、そのノルムが指定量以下となるような設計解集合内での座屈荷重係数の最小値を制約条件として考慮する設計問題を考える必要がある。非対称分岐点の場合には、major imperfection の符号により、臨界点荷重係数が存在しなくなる場合と、臨界点荷重係数が増加あるいは減少する場合が存在する。ところで、増加するような臨界点荷重は、荷重の存在しない初期状態からは到達できない complementary path といわれる経路に存在するものである。したがって、非対称分岐点の場合には、不整の符号によって、臨界点荷重係数が存在しなくなる場合と減少する場合がある。

一方、安定対称分岐点の場合には、major imperfection が存在することにより臨界点荷重係数は存在しなくなり、major imperfection の存在しない完全系の座屈荷重係数は、不整のノルムが一定値以内であるような設計解集合内での座屈荷重係数の最小値をとる。したがって、この場合には、major imperfection の存在しない系の座屈荷重係数に関する制約条件を考慮した最適設計問題を考えることは意味のあることである。また、major imperfection の存在により、座屈荷重係数は存在しなくなるが、ある一定荷重の作用した状態での変形量が著しく大きくなるため、そのような不整の存在する構造物を設計することは実用的であるとはいえない。以上の理由により、本章では、minor imperfection のみを考慮した最適性必要条件を用いることとする。また、以下で述べる最適性必要条件はその分岐点が、安定対称分岐点あるいは不安定対称分岐点の両方の場合に成立するものである。

図 6.9 は、2つの不整パラメータを有する場合について、minor imperfection と major imperfection の方向を描いたものである。ところで、何らかの対称性を有する構造物に対して対称な荷重が作用するとき、その対称性を保持するような初期不整は minor imperfection に相当する。そのような構造物は対称性を保持することを前提にして設計されるから、minor imperfection のみを考慮した設計問題を考えることは実用上意味のあることである。

以上の理由により、本章では対称分岐点型座屈を呈する設計解集合を許容設計解集合と考えた最適性必要条件を導く。対称なトラスに対して対称あるいは逆対称な断面積変化を与えるためには、全部材をそれぞれ等しい断面積を有するグループに分ける必要がある。全部材の断面積を r 個のグループに分けるものとし、第 k グループの部材数を m^k 、第 k グループに含まれる部材の番号の集合を I_k とする。また、第 k グループの部材の断面積を a_k とする。第 k グループの断面積及び最小断面積制限値をそれぞれ a_k 及び \bar{a}_k とし、不整パラメータ ξ を

$$\begin{aligned}\tilde{A}_j(\xi) &= \tilde{a}_k(\xi) \\ &= a_k^0 + a_k^d \xi \quad (j \in I_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m^k)\end{aligned}\tag{6.74}$$

のように定める。いま、第 l グループの部材の断面積に対する最適性必要条件を求めるため、 $a_l^d = 1$, $a_i^d = 0$ ($i \neq l$) とすると、(6.38) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda^c}{\partial a_l} &= \left. \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \\ &= \frac{1}{\beta^B} \left[\sum_{s=2}^f \left\{ \frac{C_{11s}}{C_{ss}} \sum_{j \in I_l} \left(\frac{\partial C_s}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right\} - \sum_{j \in I_l} \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right] \Bigg|_{\xi=0} \\ &\quad (l = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (6.75)$$

さらに、 τ_k^B を

$$\begin{aligned} \tau_k^B &= \left[\sum_{s=2}^f \left\{ \frac{C_{11s}}{C_{ss}} \sum_{j \in I_k} \left(\frac{\partial C_s}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right\} - \sum_{j \in I_k} \left(\frac{\partial C_{11}}{\partial A_j} \frac{d\tilde{A}_j}{d\xi} \right) \right] \Bigg|_{\xi=0} \\ &\quad (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (6.76)$$

で定め、 ζ_k^B を

$$\zeta_k^B = \frac{1}{\beta^B} \tau_k^B \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (6.77)$$

のように定義すると、対称分岐点型座屈の場合の最適性必要条件は、次の表現に帰せられる。

$$\begin{aligned} a_k &> \bar{a}_k \quad \text{のとき} & \mu \zeta_k^B &= l_k \\ a_k &= \bar{a}_k \quad \text{のとき} & \mu \zeta_k^B &\leq l_k \quad (k = 1, 2, \dots, r) \end{aligned} \quad (6.78a, b)$$

ここで、 l_k は第 k グループに属する部材の部材長の総和である。

6.4 指定極限点荷重係数をパラメータとした最適設計解順序集合生成法

最小断面積制限値ベクトル $\bar{\mathbf{A}}$ が定められたとき、Problem OPB に対する最適設計解は、指定座屈荷重係数 Λ_a^c の指定値ごとに決定される。したがって、最適設計解は Λ_a^c の関数と考えられ、それを $\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c)$ のように表わす。 Λ_a^c は全順序関係の成立する実数値集合に属するため、 $\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c)$ を「 Λ_a^c をパラメータとした最適設計解順序集合」と定義する。他の変数についても Λ_a^c の関数であることを上添字 $\hat{}$ を用いて表わす。いま、最適設計解 $\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c)$ 及びそれに対応する座屈時の一般化変位ベクトル等は、 Λ_a^c に関して必要なだけ連続微分可能な関数とする。このとき、1つの指定座屈荷重係数の値 Λ_{a0}^c に対する最適設計解 $\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_{a0}^c)$ が得られたならば、 Λ_{a0}^c の近傍の Λ_a^c に対応する最適設計解は、次のようなテイラー展開表現で近似することができる。

$$\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c) = \hat{\mathbf{A}}(\Lambda_{a0}^c) + \hat{\mathbf{A}}'(\Lambda_{a0}^c)(\Lambda_a^c - \Lambda_{a0}^c) + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{A}}''(\Lambda_{a0}^c)(\Lambda_a^c - \Lambda_{a0}^c)^2 + \dots \quad (6.79)$$

ここで、 $'$ は Λ_a^c に関する微分を表わす。したがって、Problem OPB は、 $\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c)$ の Λ_{a0}^c における Λ_a^c に関する微分係数を求める問題に帰せられる。

ところで、 Λ_a^c に関する微分係数を求めるためには、釣合い式、座屈条件式及び最適性条件を Λ_a^c で微分した式を用いる必要がある。極限点型座屈の場合及び対称分岐点型座屈の場合に対応する最適性条件を比較すると、対称分岐点型座屈の場合には行列 C の対角成分 C_{ss} ($s \geq 2$) が含まれること等の理由により、極限点型の場合と比べて非常に複雑であることがわかる。したがって、以下では極限点型座屈の場合についてのみ、 Λ_a^c に関する区分的テイラー展開手法を用いて最適設計解順序集合を生成する手法を示す。

釣合い式 (6.1) の両辺を Λ_a^c で微分すると、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\partial S_i}{\partial A_j} \hat{A}_j' \right\} + \sum_{j=1}^f \left\{ \hat{S}_{ij} \hat{Q}_j^{d'} \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.80)$$

以下簡単のため引数 Λ_a^c は省略する。また、以下の各式において Π^S に関する量は極限点で評価するものとする。また、(6.9a) の両辺を Λ_a^c で微分すると、

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial S}{\partial A_i} \hat{A}_i' \right\} \hat{\Phi}_s^c + \sum_{j=1}^f \left\{ \frac{\partial S}{\partial Q_j} \hat{Q}_j^{d'} \right\} \hat{\Phi}_s^c + \hat{S} \hat{\Phi}_s^{c'} = \hat{\lambda}_s' \hat{\Phi}_s^c + \hat{\lambda}_s \hat{\Phi}_s^{c'} \quad (s = 1, 2, \dots, f) \quad (6.81)$$

を得る。ここで、極限点では s の最小固有値 λ_1 に対して $\lambda_1 = C_{11} = 0$ が成立するから

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1' = 0 \quad (6.82)$$

である。(6.43a, b) より、明らかに次式が成立する。

$$\begin{aligned} \hat{A}_i > \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \hat{\mu}' \hat{\zeta}_i^L + \hat{\mu} \hat{\zeta}_i^{L'} = 0 \\ \hat{A}_i = \bar{A}_i \quad \text{のとき} \quad & \hat{A}_i' = 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6.83a, b)$$

(6.47) を用いると、(6.21) の両辺を Λ_a^c で微分することにより

$$\hat{\zeta}_i^{L'} = \left[\left(\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial A_i} \right)' \frac{\partial \hat{D}_1}{\partial \Lambda} - \frac{\partial D_1}{\partial A_i} \left(\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \right)' \right] / \left(\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda} \right)^2 \quad (6.84)$$

を得る。さらに、(6.47) の両辺を A_i で微分した式及び (6.48) を Λ_a^c で微分することにより、次の各式を得る。

$$\left(\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial A_i} \right)' = \left\{ \left(\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial A_i \partial Q^2} \right) \hat{Q}^{d'} \right\}^T \hat{\Phi}_1^c + \left(\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial A_i^2 \partial Q} \hat{A}_i' \right)^T \hat{\Phi}_1^c + \left(\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial A_i \partial Q} \right)^T \hat{\Phi}_1^{c'} \quad (6.85)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial \Lambda} \right)' = \left\{ \left(\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial Q^2} \right) \hat{Q}^{d'} \right\}^T \hat{\Phi}_1^c + \left(\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial Q} \right)^T \hat{\Phi}_1^{c'} \quad (6.86)$$

これらの式は、必要な階数まで Λ_a^c に関して微分可能であるものとする。以上の式を用いて、次のようなアルゴリズムに基づき、最適設計解順序集合を生成する。

[Step 1] 全ての部材の断面積が、その最小制限値で定まるような設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ に対して増分解析を行ない、その座屈荷重係数を $\bar{\Lambda}^c$ とする。ここでは、座屈形態が極限点型である場合のみを考える。設計 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ は、どの部材の断面積も減少させることができないため、明らかに $\Lambda_a^c = \bar{\Lambda}^c$ に対応する Problem OBP の最適設計解である。

[Step 2] 接線剛性行列 $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{A}}, \mathbf{Q}^d(\bar{\mathbf{A}}), \bar{\Lambda}^c)$ に対して固有値解析を行ない、0 である 1 次固有値に対応する 1 次固有モード $\hat{\Phi}_1^c(\bar{\mathbf{A}})$ を求める。(6.46) 及び (6.47) を用いて ζ_i^L を計算し、 ζ_i^L/L_i が最大となっている部材を第 1 部材とする。第 1 部材で $\mu\zeta_i^L = L_i$ が成立するように μ を決定する。最適性必要条件 (6.51a, b) から明らかなように、 Λ_a^c を $\bar{\Lambda}^c$ から増加させると、第 1 部材の断面積がその最小制限値から増加する。

[Step 3] (6.83a, b) より、第 1 部材に対しては $\hat{\mu}'\hat{\zeta}_1^L + \hat{\mu}\hat{\zeta}_1^{L'} = 0$ であり、他の部材に対しては $\hat{A}_i' = 0$ が成立する。ゆえに、(6.80) ~ (6.83a) から得られる $2f+2$ 元連立 1 次方程式を解き、 $\hat{A}_1'(\bar{\Lambda}^c)$ 、 $\hat{\Phi}_1^c(\bar{\Lambda}^c)$ 、 $\hat{\mu}'(\bar{\Lambda}^c)$ 及び $\hat{Q}^d(\bar{\Lambda}^c)$ を求めることができる。さらに、連立 1 次方程式を解くことにより、高階微分係数まで求めることができる。したがって、次のようなテイラー展開式が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(\Lambda_a^c) &= \bar{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}}'(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{A}}''(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c)^2 + \cdots \\ \hat{\Phi}_1^c(\Lambda_a^c) &= \hat{\Phi}_1^c(\bar{\Lambda}^c) + \hat{\Phi}_1^{c'}(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c) + \frac{1}{2}\hat{\Phi}_1^{c''}(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c)^2 + \cdots \\ \hat{\mu}(\Lambda_a^c) &= \hat{\mu}(\bar{\Lambda}^c) + \hat{\mu}'(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c) + \frac{1}{2}\hat{\mu}''(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c)^2 + \cdots \\ \hat{Q}^d(\Lambda_a^c) &= \hat{Q}^d(\bar{\Lambda}^c) + \hat{Q}^{d'}(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c) + \frac{1}{2}\hat{Q}^{d''}(\bar{\Lambda}^c)(\Lambda_a^c - \bar{\Lambda}^c)^2 + \cdots \quad (6.87a \sim d)\end{aligned}$$

$\hat{\zeta}_i^L$ ($i \neq 1$) に対しては、誤差を小さくするため、(6.87a ~ d) を用いて得られる $\hat{\mathbf{A}}$ 、 $\hat{\Phi}_1^c$ 及び \hat{Q}^d を (6.46) に代入して計算する。

[Step 4] Λ_a^c を $\bar{\Lambda}^c$ から増加させ、次に $\hat{\mu}\hat{\zeta}_i^L = L_i$ となる部材を第 2 部材とし、そのときの Λ_a^c の値を Λ_{a1}^c とする。 $\Lambda_a^c = \Lambda_{a1}^c$ での微分係数を、 $\hat{\mu}'\hat{\zeta}_i^L + \hat{\mu}\hat{\zeta}_i^{L'} = 0$ ($i = 1, 2$) 及び $\hat{A}_i' = 0$ ($i \neq 1, 2$) を用いて求める。以後、次の条件の 1 つが満たされると、支配式を変更し、連立 1 次方程式を再構成して微分係数を修正する。

TPC 1 $\hat{\mu}\hat{\zeta}_i^L < L_i$ であった部材で、 $\hat{\mu}\hat{\zeta}_i^L = L_i$ が成立する。

TPC 2 $\hat{A}_i > \bar{A}_i$ であった部材で $\hat{A}_i = \bar{A}_i$ が成立する。

TPC 3 1 つの区間の区間長が、あらかじめ定められた上限値 $\Delta\Lambda_a^c$ に一致する。

本手法は、増分解析を初期最適設計解 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ に対して 1 度行なうだけなので、大規模トラスに対して有効である。

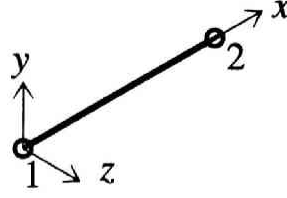


図 6.10 トラス部材の座標系

6.5 トラスに対する基礎式の誘導

本節では、トラスに対する基礎式を、変形前の初期状態を参照するラグランジュ表示 [14,15] を用いて導く。トラス部材の両端の節点番号及び、変形前の初期状態における局所座標を図 6.10 に示す。節点 1 及び節点 2 の x 、 y 及び z 方向の初期状態からの変位を、系座標に関する一般化変位ベクトル \mathbf{Q} の関数として、それぞれ $v_1^x(\mathbf{Q})$ 、 $v_1^y(\mathbf{Q})$ 、 $v_1^z(\mathbf{Q})$ 及び $v_2^x(\mathbf{Q})$ 、 $v_2^y(\mathbf{Q})$ 、 $v_2^z(\mathbf{Q})$ で表わす。また、 $\varepsilon_i^x(\mathbf{Q})$ 、 $\varepsilon_i^y(\mathbf{Q})$ 及び $\varepsilon_i^z(\mathbf{Q})$ を

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^x(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{L_i} \{v_2^x(\mathbf{Q}) - v_1^x(\mathbf{Q})\}, \quad \varepsilon_i^y(\mathbf{Q}) = \frac{1}{L_i} \{v_2^y(\mathbf{Q}) - v_1^y(\mathbf{Q})\}, \\ \varepsilon_i^z(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{L_i} \{v_2^z(\mathbf{Q}) - v_1^z(\mathbf{Q})\}\end{aligned}\quad (6.88a \sim c)$$

で定義し、第 i 部材のひずみ $\varepsilon_i(\mathbf{Q})$ を

$$\varepsilon_i(\mathbf{Q}) = \varepsilon_i^x(\mathbf{Q}) + \frac{1}{2} \{ \varepsilon_i^x(\mathbf{Q})^2 + \varepsilon_i^y(\mathbf{Q})^2 + \varepsilon_i^z(\mathbf{Q})^2 \} \quad (6.89)$$

で定める。 $\varepsilon_i(\mathbf{Q})$ は変形前の座標系に基づき定められ、一般に Green のひずみとよばれるものである。全ポテンシャルエネルギー $\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ は、 $\varepsilon_i(\mathbf{Q})$ を用いて次のように書ける。

$$\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{1}{2} A_i E L_i \varepsilon_i(\mathbf{Q})^2 \right\} - \Lambda \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \quad (6.90)$$

ここで、 E は弾性係数であり、 \mathbf{P} は比例載荷荷重を規定する単位荷重ベクトルである。釣合い式 (6.1) は次のようになる。

$$\sum_{j=1}^m \left\{ A_j E L_j \varepsilon_j \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial Q_i} \right\} - \Lambda P_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (6.91)$$

ここで、 P_i は \mathbf{P} の第 i 成分である。また、簡単のため引数は省略する。(6.9a) において、行列 \mathbf{S} の第 i 行第 j 列成分 $S_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial Q_i \partial Q_j}$ は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial Q_i \partial Q_j} &= \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{1}{2} A_k E L_k \frac{\partial^2 (\varepsilon_k^2)}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ A_k E L_k \left(\varepsilon_k \frac{\partial^2 \varepsilon_k}{\partial Q_i \partial Q_j} + \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial Q_i} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial Q_j} \right) \right\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, f) \end{aligned} \quad (6.92)$$

で与えられる。(6.49) 及び (6.50) の $\frac{\partial D_1}{\partial A_i}$ 及び $\frac{\partial D_1}{\partial \Lambda}$ は, (6.47) 及び (6.90) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_1}{\partial A_i} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial A_i \partial \mathbf{Q}} \right)^T \Phi_1^c \\ &= EL_i \varepsilon_i \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \mathbf{Q}} \right)^T \Phi_1^c \quad (i = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (6.93)$$

ここで, 以下ではすべての量を極限点で評価するものとする。(6.80) において, S_{ij} は (6.92) のとおりであり, $\frac{\partial S_i}{\partial A_j}$ は, (6.90) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_i}{\partial A_j} &= \frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial A_j \partial Q_i} \\ &= EL_j \varepsilon_j \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, f; \quad j = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (6.94)$$

のようになり, (6.81) の $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial A_i}$ 及び $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial Q_j}$ の第 k 行第 l 列成分は, (6.92) を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{kl}}{\partial A_i} &= \frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial A_i \partial Q_k \partial Q_l} \\ &= EL_i \left(\varepsilon_i \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial Q_k \partial Q_l} + \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial Q_k} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial Q_l} \right) \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad k, l = 1, 2, \dots, f)\end{aligned}\quad (6.95)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{kl}}{\partial Q_j} &= \frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial Q_j \partial Q_k \partial Q_l} \\ &= \sum_{s=1}^m \left\{ A_s EL_s \left(\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial Q_j} \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial Q_k \partial Q_l} + \varepsilon_s \frac{\partial^3 \varepsilon_s}{\partial Q_j \partial Q_k \partial Q_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial Q_j \partial Q_k} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial Q_l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial Q_k} \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial Q_j \partial Q_l} \right) \right\} \quad (k, l = 1, 2, \dots, f)\end{aligned}\quad (6.96)$$

のように書ける。また, (6.85) において, $\Pi^S(\mathbf{A}, \mathbf{Q}, \Lambda)$ は設計変数 \mathbf{A} の1次関数であるから $\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial A_i^2 \partial \mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ であり, ベクトル $\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial A_j \partial \mathbf{Q}}$ の第 i 成分 $\frac{\partial S_i}{\partial A_j}$ 及び, 行列 $\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial A_i \partial \mathbf{Q}^2}$ の第 k 行第 l 列成分は, それぞれ (6.94) 及び (6.95) に示したとおりである。(6.90) より, (6.58) の $\frac{\partial^3 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial \mathbf{Q}^2}$ は $\mathbf{0}$ であり, $\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial \mathbf{Q}}$ の第 i 成分 $\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial Q_i}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial \Lambda \partial Q_i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i} (-\mathbf{P}^T \mathbf{Q}) \\ &= -P_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (6.97)$$

これらの式を用いて, 6.4 節で述べた区分的テイラー展開手法により, 極限点型座屈の場合の最適設計解順序集合を生成することができる。

ところで、6.5節で示した手法では、その第1段階において、すべての部材の断面積がその最小制限値で定まるような自明な最適設計解に対して増分解析を行ない、極限点荷重係数を求めなければならない。増分解析は、極限点型座屈を呈する場合に適している変位増分法を用いる[13]。増分解析を行なう際に必要な接線剛性行列の第 i 行第 j 列の成分は、(6.92) で与えられる $\frac{\partial^2 \Pi^S}{\partial Q_i \partial Q_j}$ に一致する。十分大きい増分変位量で良好な精度の解を得るためには、各ステップで Newton-Raphson 法を用いた繰返し計算を行なう必要がある。しかし、ここでは繰返し計算は行わず、十分小さい変位増分量を与えることにより、良好な精度の解を求めるものとする。

6.6 例題

6.3節では、簡単な剛体バネモデルを用いて、極限点型座屈の場合の最適性必要条件の検証を行った。本節では、まず、4部材立体トラスを用い、極限点型座屈の場合の最適性条件の検証を行なう。さらに、対称な荷重の作用する対称塔状平面トラスを用いて、対称分岐点の場合に対して導いた最適性必要条件の検証を行なう。また、極限点型座屈の場合に対する区分的テイラー展開手法を用い、単層立体トラスに対して最適設計解順序集合を求め、最適設計解順序集合の特性を明らかにする。以下の例題で、部材の材料は $E = 2100.0 \text{ tonf/cm}^2$ の鋼材である。また、Fortran プログラムの作成において、数式処理言語 Reduce 3.3 [21] を用いた。増分解析において、行列 S の最小固有値 λ_1 が 0 となる荷重係数の値及びそれに対応する座屈モード Φ_1^c は、線形近似を用いて求めた。さらに、文献 [22] の例題と同一条件での解析を行なうことにより、増分解析プログラムが十分な精度を有することを検証した。

4部材立体トラスによる極限型座屈の場合の最適性条件の検証

図 6.11 のような、スパンに比べてライズの非常に小さい 4 部材立体トラスを考える。節点 5 に、 z 軸の負の向きに比例載荷荷重 ΛP が作用するのでとする。この場合、荷重係数 Λ を増加させると臨界点に達する。この臨界点は、 $\frac{\partial G_1}{\partial \Lambda} \neq 0$ が成立するため、極限点型であることを確認した。トラスの x 軸に関する対称性より、最適設計解において明らかに $A_1 = A_3$ 及び $A_2 = A_4$ が成立する。比例載荷荷重の単位量 P は 1.0 kgf とする。また、指定座屈荷重係数 Λ_a^c は 1.0 とする。設計解 $A_1 = A_3 = A_1^*$, $A_2 = A_4 = A_2^*$ に対して増分解析を行ない、得られた座屈荷重係数を Λ^* とする。このとき、明らかに、設計解 $A_1 = A_3 = A_1^*/\Lambda^*$, $A_2 = A_4 = A_2^*/\Lambda^*$ の座屈荷重係数は Λ_a^c に一致する。したがって、 A_1 をパラメータとして、 Λ^c が $\Lambda_a^c = 1.0$ に一致するような A_2 の値を求めることができる。 $\Lambda^c = \Lambda_a^c$ が成立するような A_1 と A_2 の組の集合における A_1/A_2 と全部材体積 V の関係を図 6.12 に示す。図 6.12 において、 $A_1/A_2 \simeq 1.06$ で V は最小になっている。さらに、 A_1/A_2 と τ_i^L/L_i の関係を図 6.13 に示す。図 6.13 において、 $A_1/A_2 \simeq 1.06$ で τ_1^L/L_1 と τ_2^L/L_2 が一致している。以上より、 V が最小となる最適設計解において、 τ_1^L/L_1 と τ_2^L/L_2 がほぼ一致して、最適性条件 (6.51a) を満たす μ が存在することがわかる。以上より、極限点型座屈の場合の最適性必要条件が検証された。

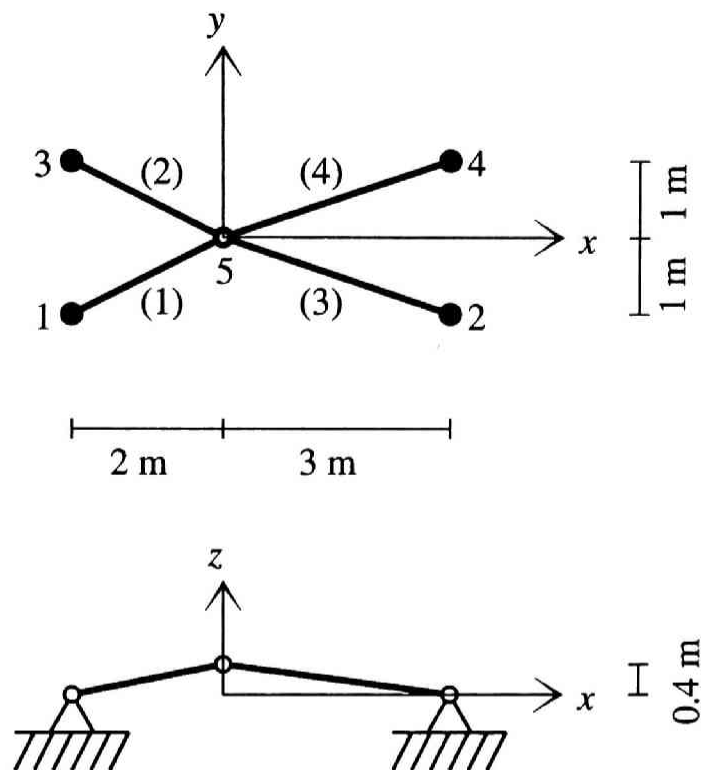


図 6.11 4 部材立体トラス

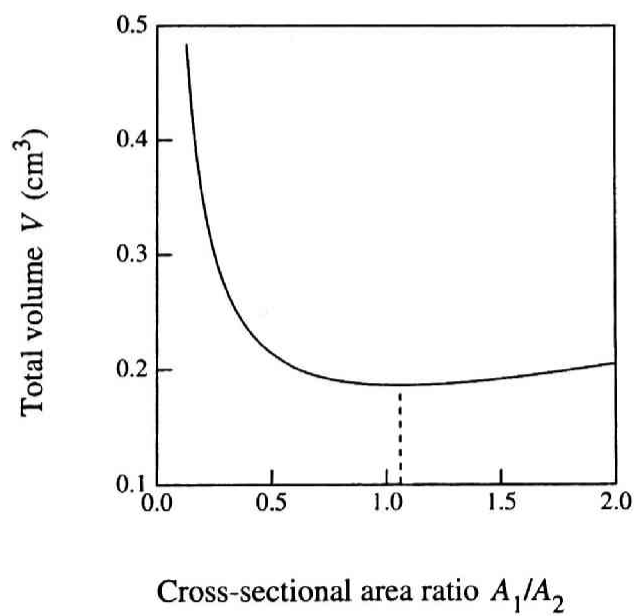


図 6.12 4 部材立体トラスの最適設計解における A_1/A_2 と全部材体積の関係

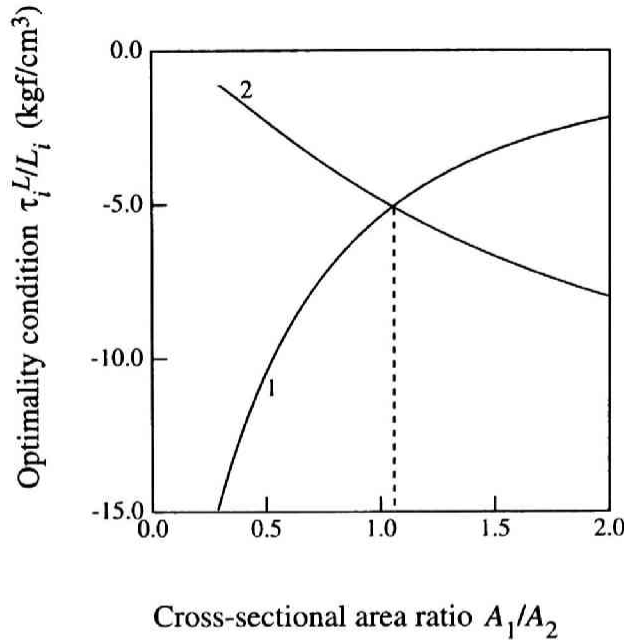


図 6.13 4 部材立体トラスの最適設計解における A_1/A_2 と τ_i^L/L_i の関係

50 部材塔状平面トラスによる対称分岐点型座屈の場合の最適性条件の検証

対称分岐点型座屈の場合の最適性必要条件について検証するため、図 6.14 のような 50 部材 10 層塔状平面トラスに対して種々の断面積比を与えて増分解析を行なった。 x 方向及び y 方向部材の部材長はそれぞれ 200.0 cm 及び 400.0 cm である。50 個の部材を 2 つのグループに分け、 x 方向及び y 方向部材の断面積を a_1 、斜材の断面積を a_2 とする。ここで、 $P = 1.0$ kgf、 $\Lambda_a^c = 1.0$ である。この場合、荷重係数を増加させると、臨界点に達する。この臨界点では、 $\frac{\partial G_1}{\partial \Lambda} = 0$ 及び G_{111} が成立し、対称分岐点型であることを確認した。設計解 $a_1 = a_1^*$ 、 $a_2 = a_2^*$ に対して増分解析を行ない、得られた座屈荷重係数を Λ^* とする。このとき、明らかに、設計解 $a_1 = a_1^*/\Lambda^*$ 、 $a_2 = a_2^*/\Lambda^*$ の座屈荷重係数は Λ_a^c に一致する。したがって、 a_1 をパラメータとして、 Λ^c が Λ_a^c に一致するような a_2 の値を求めることができる。 $\Lambda^c = \Lambda_a^c = 1.0$ が成立するような a_1 と a_2 の組の集合における a_1/a_2 と V の関係を図 6.15 に示す。図 6.15 において、 $a_1/a_2 \simeq 10.19$ で V は最小になっている。ここで、各設計解において、座屈モード Φ_1^c は y 軸に平行な軸に対して逆対称なモードであり、このことから座屈形態が対称分岐点型となっていることが確認できる。 $a_1/a_2 = 10.19$ の場合の座屈モードを図 6.16 に示す。 a_1/a_2 と τ_i^B/l_i の関係を図 6.17 に示す。図 6.17 において、 $a_1/a_2 \simeq 10.19$ で τ_1^B/l_1 と τ_2^B/l_2 が一致している。ゆえに、 V が最小となる最適設計解において、 τ_1^B/l_1 と τ_2^B/l_2 がほぼ一致し、最適性条件 (6.78a) を満たすラグランジュ定数 μ が存在する。以上より、対称分岐点型座屈の場合の最適性必要条件が検証された。

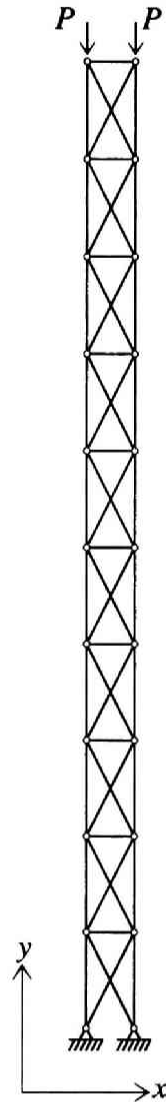


図 6.14 50 部材塔状平面トラス

24 部材立体トラスの最適設計解順序集合

図 6.18 のような 24 部材単層立体トラスに対して，指定極限点型座屈荷重係数に関する区分的テイラー展開手法を用いて最適設計解順序集合を生成した。各節点及び支点の座標を表 6.1 に示す。ここで，節点及び支点の番号は図 6.18 に示したとおりである。中央節点（節点 7）に， z 軸の負の方向に比例載荷荷重 ΛP が作用するものとする。また， $P = 1.0 \text{ kgf}$ ， $\Delta\Lambda_a^c = 5.0$ である。最小断面積制限値は，全部材に対して 1.0 cm^2 とする。 $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ のトラスに対して増分解析を行なうと， $\Lambda = \Lambda^c = 485.78$ で極限点に達した。 Λ_a^c を $\bar{\Lambda}^c = 485.78$ から増加させ， Λ_a^c に関するテイラー展開により，最適設計解順序集合を求めた。 $\Lambda_a^c = 1784.8$ ， 3224.8 及び 5484.8 に対応する部材断面積分布を図 6.19(a ~ c) に示す。図 6.19(a ~ c) より， Λ_a^c を増加させると，荷重の作用する中央節点に接続する部材及び，周方向の部材の断面積が増加し，中央部分に剛なト

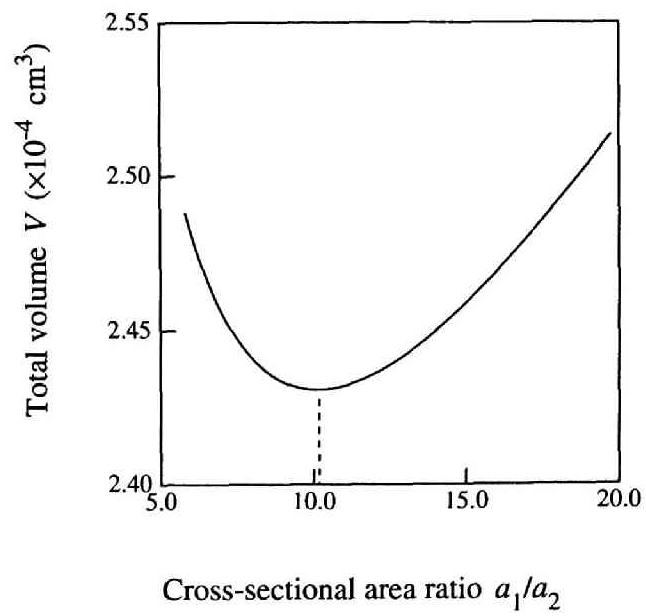


図 6.15 50 部材塔状平面トラスの a_1/a_2 と全部材体積の関係

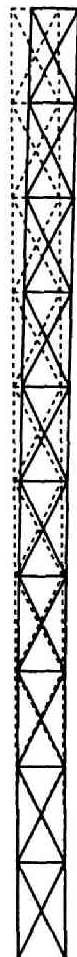


図 6.16 50 部材塔状平面トラスの座屈モード

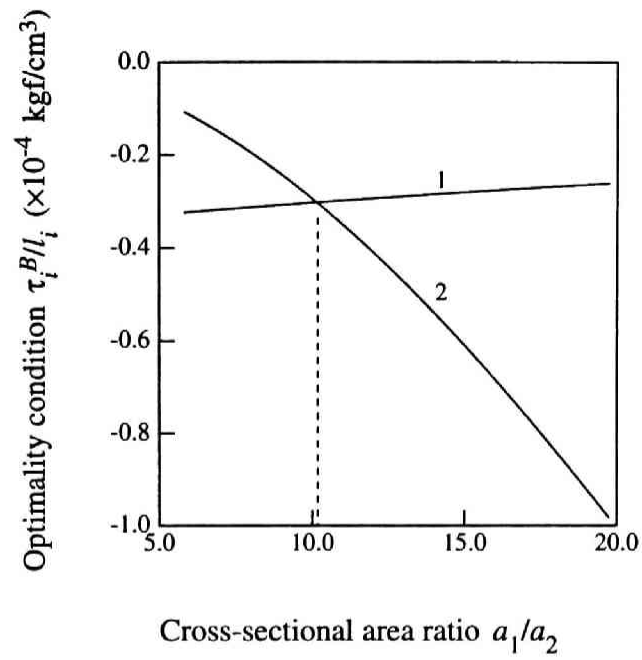


図 6.17 50 部材塔状平面トラスの a_1/a_2 と τ_i^B/l_i の関係

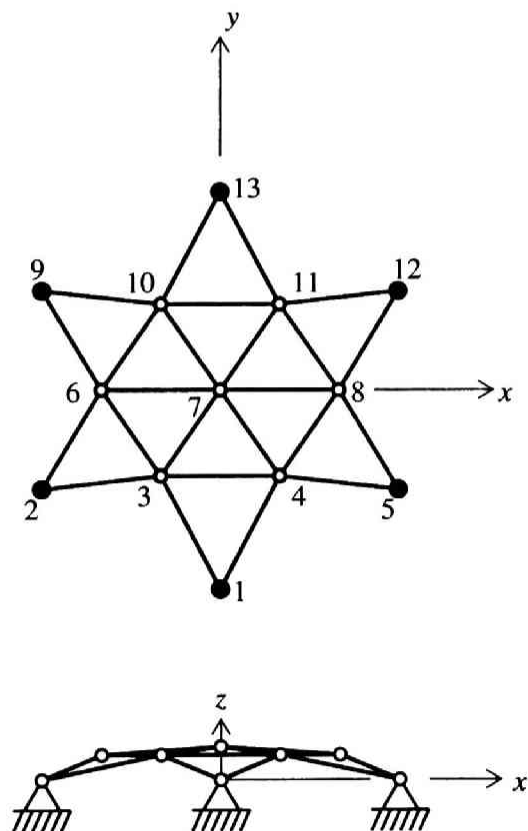


図 6.18 24 部材立体トラス

表 6.1 24 部材単層立体トラスの節点座標 (cm)

節点番号	x	y	z
1	0.0	-500.0	0.0
2	-450.0	-250.0	0.0
3	-150.0	-216.5	62.16
4	150.0	-216.5	62.16
5	450.0	-250.0	0.0
6	-300.0	0.0	62.16
7	0.0	0.0	82.16
8	300.0	0.0	62.16
9	-450.0	250.0	0.0
10	-150.0	216.5	62.16
11	150.0	216.5	62.16
12	450.0	250.0	0.0
13	0.0	500.0	0.0

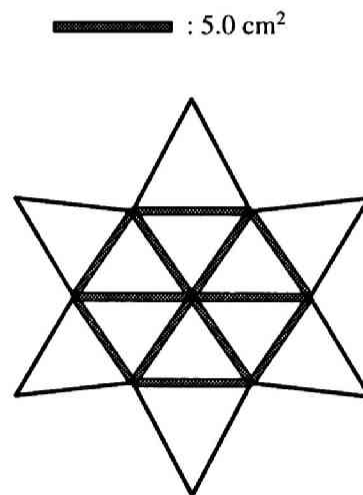


図 6.19(a) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 1784.8$ に対応する
最適設計解の部材断面積

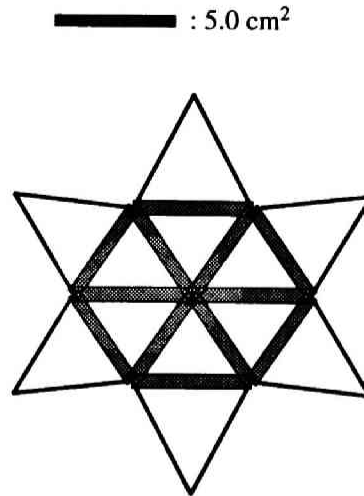


図 6.19(b) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 3224.8$ に対応する
最適設計解の部材断面積

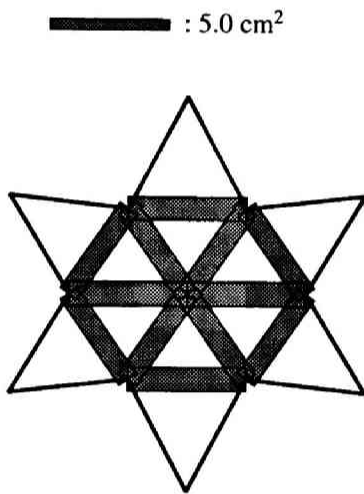


図 6.19(c) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 5484.8$ に対応する
最適設計解の部材断面積

ラスが生成されることがわかる。 $\Lambda_a^c = 5484.8$ に対応する最適設計解に対して増分解析を行なうと、 $\Lambda = 5490.4$ で極限点に達した。この結果より、テイラー展開による誤差は十分に小さいといえる。 Λ_a^c と A_4 及び A_7 の関係を図 6.20 に示す。この例では、 A_4 及び A_7 は Λ_a^c のほぼ線形な関数である。また、 Λ_a^c と V の関係を図 6.21 に示す。図 6.21 より、 V は Λ_a^c の単調増加関数であることがわかる。 Λ_a^c と、荷重の作用する節点の z 方向変位の絶対値の関係を図 6.22 に示す。図 6.22 より、座屈前変位は Λ_a^c の増加にともないほぼ線形に増加している。 $\Lambda_a^c = 485.78$

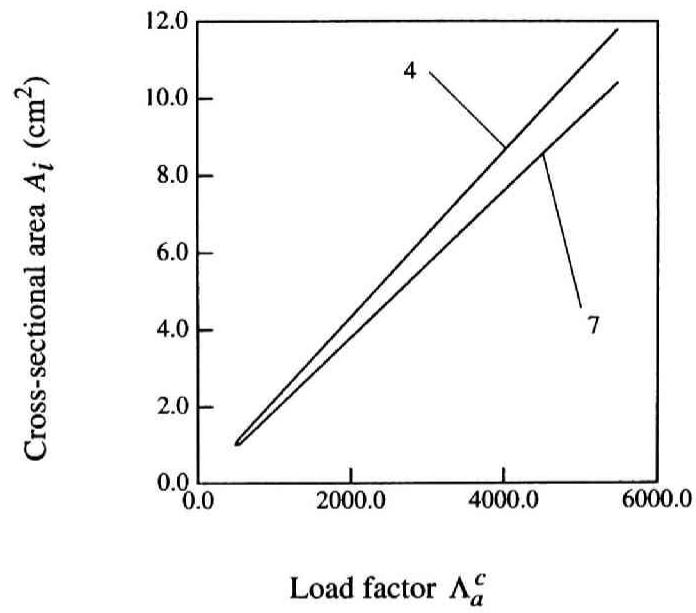


図 6.20 24 部材立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定座屈荷重係数と部材断面積の関係

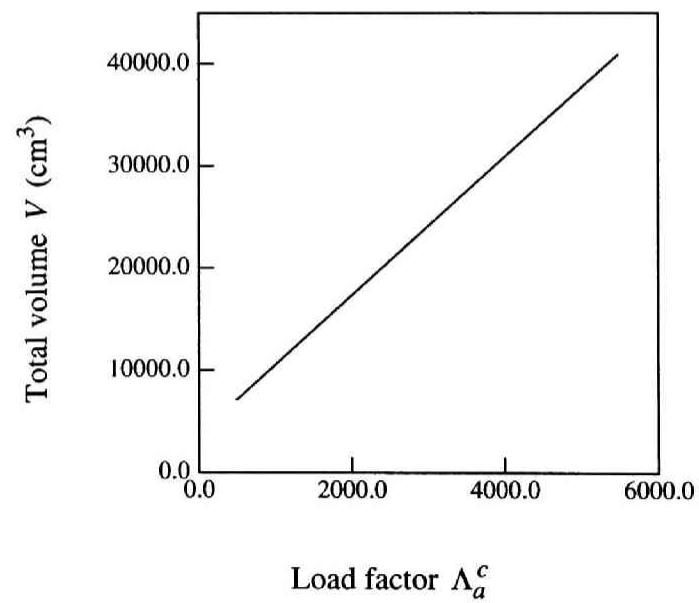


図 6.21 24 部材立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定座屈荷重係数と全部材体積の関係

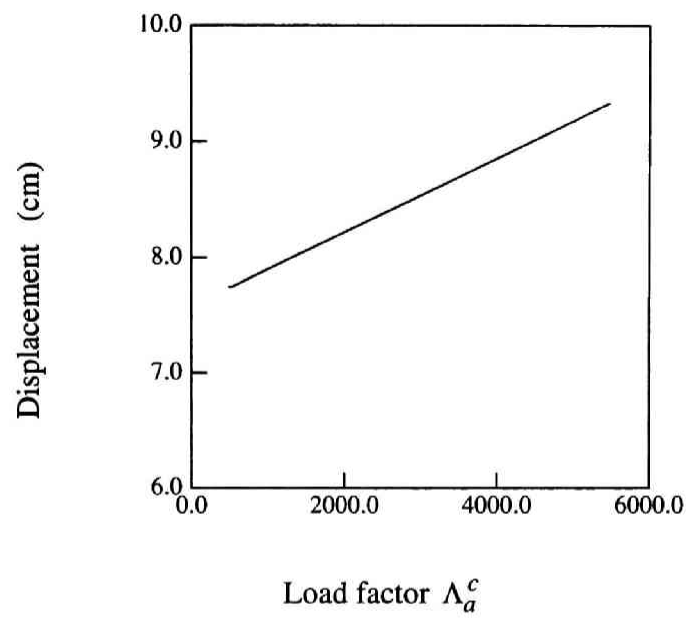


図 6.22 24 部材立体トラスの最適設計解順序集合における,
指定座屈荷重係数と中央節点変位の関係



図 6.23(a) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 485.78$ に対応する
最適設計解における座屈前変形



図 6.23(b) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 5490.4$ に対応する
最適設計解における座屈前変形

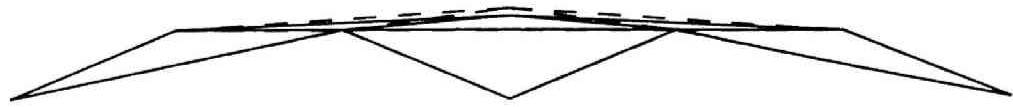


図 6.24(a) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 485.78$ に対応する
最適設計解における座屈モード

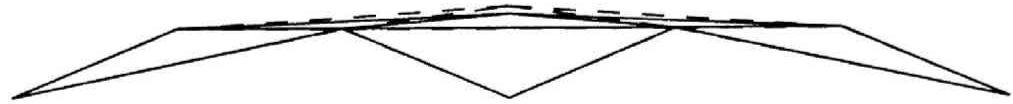


図 6.24(b) 24 部材立体トラスの $\Lambda_a^c = 5490.4$ に対応する
最適設計解における座屈モード

及び 5490.4 に対応する最適設計解の z 方向座屈前変形 Q^d は、図 6.23(a,b) のとおりである。図 6.23(a,b) より、座屈前には中央部分だけが大きく変形していることがわかる。このことは、 Λ_a^c を増加させるのにもとない、荷重の作用する中央節点に接続する部材及び、周方向の部材の断面積が増加することと対応する。さらに、 $\Lambda_a^c = 485.78$ 及び 5490.4 に対応する最適設計解の、座屈モード Φ_1^c の z 方向成分を図 6.24(a,b) に示す。図 6.24(a,b) より、座屈モードは中央部分のみが大きく変形するモードであることがわかる。本手法によると、図 6.19 ～ 図 6.24 のような種々の設計図表を容易に作成することができ、設計者はこれらの設計図表に基づき、最も望ましい最適設計解を選択することができる。

6.7 6 章の結論

本章では、指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計に関し、次のような成果を得た。

1. 座屈前変形を考慮した、指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計問題において、極限点型座屈を呈する設計解集合を許容設計解集合と考えた場合に対し、文献 [5] とは全く異なる、既往の不整感度解析の理論を用いた最適性必要条件を導いた。その結果、最適性必要条件には、接線剛性行列の 0 である最小固有値に対応する固有モードが含まれることを明らかにした。
2. 対称分岐点型座屈を呈するような設計解の集合を許容設計解集合とした場合に対し、minor imperfection に関する不整感度解析の理論に基づく最適性必要条件を導いた。その結果、最適性必要条件において、接線剛性行列全固有値及びそれに対応する固有モードが含まれることを示した。

3. 極限点型座屈の場合に対し、最適設計解順序集合の概念に基づき、指定座屈荷重係数をパラメータとした区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する手法を示した。本手法では、全部材の断面積がその最小制限値に一致するような自明な初期最適設計解に対して、極限点荷重係数及び座屈モードを求めるための増分解析を1度だけ行なう。したがって、本手法は大規模トラスに対して有効である。
4. 2部材剛体バネモデルを用い、1.で導いた極限点型座屈の場合の最適性必要条件と、既往の論文で用いられている経験的最適性必要条件との比較を行なった。その結果、後者には理論上の矛盾が存在し、最適設計解において最適性条件が満たされないことを示した。
5. 簡単な4部材立体トラスを用いて、1.で得られた極限点型座屈の場合の最適性必要条件の検証を行なった。さらに、対称な比例载荷荷重の作用する50部材塔状平面トラスを用いて、対称分岐点型座屈の場合の最適性必要条件の検証を行なった。
6. 24部材単層立体トラスに対し、2.の区分的テイラー展開手法を用いて最適設計解順序集合を生成し、本手法の有効性を示した。本手法によると、部材断面積、座屈前変位等に関する種々の設計図表を容易に提示することができ、設計者はそれらの図表をもとに、最も望ましい最適設計解を選択することができる。

参考文献

- [1] M.P. Kamat and P. Ruangsilasingha, Optimization of space trusses against instability using design sensitivity derivatives, Engineering Optimization, Vol.8, pp177-188, 1985.
- [2] N.S. Khot, V.B. Venkayya and L. Berke, Optimum structural design with stability constraints, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.10, pp1097-1114, 1976.
- [3] R.H. Plaut, P. Ruangsilasingha and M.P. Kamat, Optimization of an asymmetric two-bar truss against instability, J. Struct. Mech., Vol.12(4), pp465-470, 1984.
- [4] M.P. Kamat, N.S. Khot and V.B. Venkayya, Optimization of shallow trusses against limit point instability, AIAA J., Vol.22(3), pp403-408, 1984.
- [5] N.S. Khot and M.P. Kamat, Minimum weight design of truss structures with geometric nonlinear behavior, AIAA J., Vol.23(1), pp139-144, 1985.
- [6] U.T. Ringertz, Optimization of structures with nonlinear response, Engineering Optimization, Vol.14, pp179-188, 1989.
- [7] R. Levy and H. Perng, Optimization for nonlinear stability, Comput. & Struct., Vol.30(3), pp529-535, 1988.
- [8] M.P. Saka, Optimum design of nonlinear space trusses, Comput. & Struct., Vol.30(3), pp545-551, 1988.

- [9] C.C. Wu and J.S. Arora, Design sensitivity analysis and optimization of nonlinear structural response using incremental procedure, *AIAA J.*, Vol.25(8), pp1118-1125, 1987.
- [10] C.C. Wu and J.S. Arora, Design sensitivity analysis of non-linear buckling load, *Comp. Mech.*, Vol.3, pp129-140, 1988.
- [11] M. Pyrz, Discrete optimization of geometrically nonlinear truss structures under stability constraints, *Struct. Optimization*, Vol.2, pp125-131, 1990.
- [12] N.S. Khot, Nonlinear analysis of optimized structure with constraints on system stability, *AIAA J.*, Vol.21(8), pp1181-1186, 1983.
- [13] 日本鋼構造協会, 成岡 昌夫, 中村 恒善 (編), 骨組構造解析法要覧, 培風館, 1976.
- [14] 佐藤 稔夫, 中村 恒善, 骨組構造の解析, 新建築学大系 36, 彰国社, 1982.
- [15] K. Huseyin, *Nonlinear Theory of Elastic Stability*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.
- [16] J.M.T. Thompson and G.W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [17] J.M.T. Thompson, A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems, *ZAMP*, Vol.20, pp797-846, 1969.
- [18] 坂口 実, 数理計画法, 培風館, 1968.
- [19] J. Roorda, On the buckling of symmetric structural systems with first and second order imperfection, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.4, pp1137-1148, 1968.
- [20] E.F. Masur, Buckling, post-buckling and limit analysis of completely symmetric elastic structures, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.6, pp587-604, 1970.
- [21] A.C. Hearn, *Reduce User's Manual*, Version 3.3, The Rand Corporation, Santa Monica, 1987.
- [22] Y. Hanghai and S. Kawamata, Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, *Report Inst. Industrial Science, University of Tokyo*, Vol.22(5), 1973.
- [23] 中村 恒善, 大崎 純, 藤原 誠二, 極限点荷重係数制約条件下のトラスの最適設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 構造 I, pp1127-1128, 1989.
- [24] 中村 恒善, 大崎 純, 複数座屈モード型固有値を有するトラスの順序集合, 日本建築学会近畿支部構造力学講究録, Vol.4, 構造物の新しい臨界状態とその解析法, pp141-150, 1989.

7 章 結論

本論では、大規模立体トラスの構造設計において、1つの力学的性能に関する制約条件を満たし、かつ全部材体積あるいは全部材質量を最小にするような最適設計解を得るための理論及び数値的手法を展開した。制約条件としては、1次固有振動数、強震時応答ひずみ及び座屈荷重係数を考慮し、それぞれの場合について、「最適設計解順序集合」の概念を新たに導入し、制約条件を規定するパラメータに関するテイラー展開により、最適設計解の集合を生成する理論を展開した。さらに、最小断面積制限値を定める1つのスカラーパラメータによるテイラー展開により、最適設計解順序集合を生成し、最小断面積制限値を0にまで減少させ、最適な部材配置を生成する理論を展開した。

2章では、変数の他にいくつかのパラメータを含むパラメトリック最適化問題において、変数に対して最小制限値が存在し、目的関数及び制約条件を規定する関数に関して種々の単調性の条件が成立するような、工学的に重要な種類の最適化問題に対して、3章以下の章で展開する理論の基礎となる理論を展開した。まず、不等式制約条件あるいは変数に対する最小制限値を定めるパラメータに関し、すべての変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解とする「最適解順序集合」の概念を新たに定義した。さらに、全変数とその最小制限値で定まるような自明な最適解を初期解として、パラメータに関するテイラー展開により、最適解順序集合を生成する理論を展開した。既往のパラメトリック最適化問題に対する種々の理論は、いわゆる post optimal analysis に関するものであり、何らかの方法で1つの初期最適設計解が得られていることを前提としている。それに対し、本理論を用いると、既往の最適化アルゴリズムを必要としない、独立したアルゴリズムを構築することができる。さらに、最適解のパラメータに関する微分係数が存在するための条件について考察した。また、変数に対して非負条件の存在するような最適化問題に対し、最適解順序集合生成法に基づき、不要な変数を選定する理論を展開した。この理論は、5章で展開するトラスの最適部材配置生成法の基礎となるものである。

3章では、指定1次固有振動数を有するトラスの最適設計問題に対し、指定1次固有振動数に対応する指定1次固有値をパラメータとした、最適設計解順序集合生成法の理論及び数値的手法を展開した。本手法では、全部材の断面積が最小断面積制限値で定まるような自明な最適設計解を初期解とし、指定1次固有値に関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する。本手法を用いて480部材平板状立体トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、その特性を明らかにした。その結果、指定1次固有値を増加させると、その最適設計解において、1次固有値は重複することを示した。1次固有値が重複する場合には、1次固有値の設計変数に関する感度係数が不連続な関数となるため、既往の最適化アルゴリズムを適用することは困難である。したがって、大規模立体トラスに対して1次固有値が重複する場合の最適設計解を求めた例は筆者等の研究以外には存在しない。また、本手法を用いると、指定1次固有値をパラメータとした種々の「設計図表」を得ることができ、設計者はそれらの設計図表から、最も望ましい最適設計解を選択することができる。ところで、設計者にとっては、最適設計解順序集合から1つの最適設計解を選択するための何らかの理論

が存在することが望ましい場合もある。そこで、fractional programming の定式化を用い、最適設計解順序集合を許容設計解とした 2 段階最適設計問題を定式化することにより、1 つの最も望ましい最適設計解を選択するための手法を提示した。

また、最小断面積制限値の存在しない場合について、断面積の全く存在しない不安定な設計解を初期解として、最適設計解順序集合を生成する新しい手法を提示した。本手法によると、最適設計解の、指定 1 次固有値に関する高階の微分係数まで容易に求めることができる。本手法を用いて 15 部材平面トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、その有効性を明らかにした。さらに、1 つの幾何学的形状パラメータを有する立体トラスに対し、その幾何学的パラメータを補助パラメータとして最適設計解順序集合を生成し、各指定 1 次固有値ごとに、最適幾何学的パラメータ値を見いだすことができることを示した。本手法は、種々の指定 1 次固有値に対応する最適幾何学的パラメータ値を求めることが必要な場合に対して非常に有効である。

4 章では、まず、強震時応答ひずみという局所応答量を制約条件として考慮した最適設計問題を定式化し、その最適性必要条件を導いた。入力地震動としては、与えられた設計応答スペクトルに適合する地震動の集合を考慮し、応答評価には CQC 法を用いた。また、応答応力あるいは応答ひずみが弾性範囲に存在する場合のみを考慮した。導かれた最適性条件は、強震時応答ひずみの設計感度係数を含む、非常に複雑なものであり、最適設計解を求めることは困難である。そこで、強震時応答ひずみに関する制約条件を有する全応力設計問題の 1 つとして、強震時応答ひずみ制約設計問題を定式化した。強震時応答ひずみ制約設計解では、断面積が最小制限値より大きい部材では、応答ひずみが指定値に一致し、断面積が最小制限値に一致する部材では、応答ひずみは指定値以下となっている。そこで、指定応答ひずみを規定する 1 つのパラメータを導入し、そのパラメータに関するテイラー展開により「強震時応答ひずみ制約設計解順序集合」を生成する理論及び数値的手法を展開した。強震時応答制約設計解は、上記最適設計問題に対する許容設計解であり、最適性必要条件を用いて検定することにより、最適設計解となっている可能性について検定することができる。例題では、1 つの円筒状立体トラスに対して、強震時応答ひずみ制約設計解順序集合を生成し、応答ひずみレベルの広い範囲にわたって、強震時応答ひずみ制約設計解が、上記最適設計問題の最適設計解であることを示した。

5 章では、まず、指定 1 次固有振動数を有するトラスの最適設計問題において、支持条件及び存在可能部材の配置の定められたトラスに対し、最小断面積制限値を規定するパラメータに関する区分的テイラー展開手法により、最適設計解順序集合を生成する理論を展開した。本理論によると、全部材の断面積が最小制限値で定まるような自明な最適設計解を初期解とし、最小断面積制限値を 0 まで減少させることにより、最適部材配置及びそれに対応する部材断面積集合 (最適部材配置トラス) を得ることができる。また、ピン接合平面トラスに対し、「理論的最適部材配置」及び「実用的最適部材配置」の概念を新たに導入し、理論的最適部材配置トラスには、非常に小さい値の部材断面積を有する 2 次的部材が存在することを明らかにした。そこで、まず不安定な近似最適部材配置トラスを求

め、そのトラスが不安定な場合には、ヒンジを固定して安定化することにより、実用的最適部材配置トラスを得る手法を提示した。本手法を用いて、種々のピン接合平面トラスに対して最適部材配置トラスを求めた。その結果、非構造質量による慣成力を、可能な限り直接的に支点に伝達するようなトラスが形成されることが明らかとなった。ところで、不安定性にともなう種々の困難点は、節点が理想的なピン接合であることに起因するものである。そこで、剛接合平面及び立体トラスに対しては、安定化の作業を行なうことなく、最適部材配置トラスが得られることを明らかにし、種々の剛接合平面及び立体トラスに対して最適部材配置トラスを生成した。

6章では、指定座屈荷重係数を有するトラスの最適設計問題に対し、座屈形態が極限点型であるような設計解の集合を許容設計解集合と考えた場合について、既往の不整感度解析の理論に基づく最適性必要条件を求め、簡単な剛体バネモデル及び立体トラスを用いて検証するとともに、従来用いられている経験的最適性条件との相違を明らかにした。さらに、対称分岐点型座屈を呈するような設計解を許容設計解集合と考えた場合について、対称なトラスに対称な比例載荷荷重が作用する場合を想定し、minor imperfectionを考慮した不整感度解析の理論を用いた新しい最適性必要条件を導き、簡単な塔状平面トラスを用いて検証を行なった。また、極限点型座屈の場合に対し、指定座屈荷重係数をパラメータとした区分的テイラー展開手法により最適設計解順序集合を生成する理論及び数値的手法を展開した。本手法は、全部材の断面積がその最小制限値で定まるような自明な最適設計解を初期解とし、増分解析はその初期設計解に対して1度行なうだけなので、大規模トラスに対して有効である。例題では、24部材単層立体トラスに対して最適設計解順序集合を生成し、その特性を明らかにした。

以上のように、本論文では、単一目的単一制約の最適設計問題に対して種々の理論的及び数値的成果を得た。2層立体トラスでは、1次固有振動数あるいは強震時応答ひずみ等の動的制約条件が主要な制約条件となり、単層立体トラスでは、座屈荷重係数に関する制約条件により、部材剛性が決定される場合が多いため、本論文で得られた種々の設計解は、実用上有意義な設計解に相当していることが多い。価値のあるものである。本論文では対象とする構造物をトラスに限定したが、本論で展開された種々の理論及び数値的手法は、平面及び立体骨組をはじめとし、梁、アーチ、平板等の、有限要素法を用いてモデル化される多くの種類の構造物に対して適用可能な一般的なものである。

本論で展開した設計手法を実際の構造設計に導入するためには、全部材を数個のグループに分け、それらのグループでは断面積は同一の値をとるような制約 (design variable linking) を考慮する必要がある。本論で展開した手法は、そのような場合にも容易に拡張できる。4章で展開した理論は、設計用応答スペクトルに依存するため、その応答スペクトルを決定する何らかの指標が必要である。また、4章及び6章では、弾性トラスを対象としたが、弾塑性応答を考慮した場合を含めた、より一般的な設計理論への発展が望まれる。5章で展開した、トラスの最適部材配置選定法は、トラスの最適な形状を見出すための基礎となる理論である。より現実的な成果を得るためには、より多くの存在可能部材を含む場合に対して適用し、多くの設計解を得ることが望まれる。

謝辞

卒業研究を行なうにあたって、中村恒善先生(現京都大学教授)の指導を受けることを決心して以来10年6ヶ月の年月が経過しようとしております。以来中村恒善先生には公私にわたり親切な指導をしていただき、ここに深く感謝申し上げます。大学入試では、何の迷いもなく建築学科を選択したのにもかかわらず、私にはデザインの才能はなく、入学当初から構造系に進ものと心に決めておりました。とくに、シェル構造物、空間構造物は、力学的要因からデザインが決定される数少ない構造物として、知識の全くない私にとっても非常に魅力的なものでした。中村先生は、研究室紹介の際、研究内容としてシェル・空間構造物の設計及び解析法を挙げておられたので、中村先生の指導を仰ぐ結果となった次第であります。以後10年余りにわたり、几帳面な中村先生とは全く逆のいい加減な性格の私に対して、あせることなく一人前の研究者として成長するよう、懇切丁寧に指導していただきましたことを感謝いたします。中村先生という学会有数の研究者に出会えたのはもちろんのこと、最適設計法という美しい設計理論に出会えたことは、好運であったと確信しております。

上谷宏二先生(現京都大学助教授)には、年齢的に身近な先生として、研究分野が異なるにもかかわらず、お忙しい中議論にのっていただき、ここに感謝申し上げます。とくに大学院ゼミでは、私の関係する修士2年生の修士論文に関する発表で、多くの有意義な指摘をいただくことができました。また、上谷先生の、博士学位を取得されてから現在の独自の研究分野を確立されるまでの研究生活を拝見できたことは、私の将来の研究活動において参考になることと信じます。

竹脇出先生(現京都大学助手)からは、同種の研究を行なっておられる先輩として、研究室及びゼミでの議論を通じて多くを学ぶことができましたことを感謝いたします。

大学院生として中村研究室に在籍した後輩の皆様からは、新しい目での多くの新鮮な意見を得ることができました。とくに、草場茂樹(現熊谷組)、宮本秀樹(現清水建設)、藤原誠二(現三和総合研究所)、梶井健(現鹿島建設)、小原貢(現鹿島建設)、瀧正哉(現鹿島建設)(敬称略)の諸氏とは修士論文作成をともにし、私にとって貴重な経験を得ることができましたことを感謝いたします。

野中泰二郎先生(現京都大学防災研究所教授)、藤原悌三先生(現京都大学防災研究所教授)には、本論文をまとめるにあたり、お忙しい中有意義な御指摘をたまわり、深く感謝申し上げます。

最後に、このような論文をまとめる能力を授けてくれた両親、研究生生活に深い理解を示してくれた妻、心の支えとなってくれた長男、長女に感謝します。

平成4年11月

大崎 純

